ANÁLISE DE VARIÂNCIA - ANOVA

Prof. Adriano Mendonça Souza, Dr.
Departamento de Estatística
- PPGEMQ / PPGEP - UFSM

UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Digamos que temos 6 métodos de ensino aplicados a 30 crianças cada e gostaríamos de fazer uma comparação entre os métodos.

Fazendo-se a comparação 2 a 2 por meio do teste **Z** ou do teste **t** exigiria a execução de 15 testes, pois por meio de combinação temos $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{2!\,4!} = 15\ testes,$ ou então optar pela análise de variância, onde as hipóteses testadas seriam:

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_i$

H_1: Existe pelo menos uma das médias diferentes.

Na tabela abaixo apresenta-se os métodos de ensino A, B, C, D, E e F, a média apresentada por cada método, o desvio padrão, o n° de crianças em cada método e o respectivo grau de liberdade –

$gl = \delta = N - 1$.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
$\bar{X}$	75	72	76	79	82	72
S^2	173,2	168,7	170,1	169,8	172	167,6
N	30	30	30	30	30	30
gl	29	29	29	29	29	29

Uma análise de variância permite que vários grupos sejam comparados a um só tempo, utilizando variáveis contínuas. O teste é paramétrico (a variável de interesse deve ter distribuição normal) e os grupos têm que ser independentes.

Considerando uma variável de interesse com média μ e variância σ^2 temos dois estimadores de σ^2:

S_E^2 = dispersão entre os grupos, que em inglês é representado por S_B^2 (between).

S_D^2 = dispersão dentro dos grupos, que em inglês é representado por S_W^2 (within).

O teste é aplicado utilizando a estatística calculada

$$F = \frac{S_B^2}{S_W^2}$$ que é o teste que compara variâncias.

A variância das médias amostrais é calculada por

$$S_{\bar{x}}^{2} = \frac{\sum \bar{x}_i^{2} - \frac{\left(\sum \bar{x}\right)^{2}}{k}}{k - 1}$$

onde k representa o universo de grupos, logo o grau de liberdade $\delta = k - 1$.

Neste exemplo, como o N é igual para os 6 grupos, podemos proceder:

Determinando S_E^2:

$$\sum \bar{x}_i = 75 + 72 + 76 + 79 + 82 + 72 = 456$$

$$\left(\sum \bar{x}_i\right)^2 = (456)^2$$

$$\sum \bar{x}_i^2 = 75^2 + 72^2 + 76^2 + 79^2 + 82^2 + 72^2 = 34734$$

$k = 6$

$$S_{\bar{x}}^{2} = \frac{34.734 - \dfrac{(456)^2}{6}}{5} = 15,6$$

logo pela distribuição amostral das médias temos que :

$$S_{\bar{x}}^{2} = \frac{S^{2}}{N} \Rightarrow S^{2} = S_{\bar{x}}^{2}.N$$

$S^2 = (15,6) . (30) = 468.$

Mas $S^2 = S_E{}^2$, onde $\delta^2 = N \, . \, S_x^2$.

$$S_E{}^2 = N \left[\frac{\sum \bar{x}_i^2 - \frac{\left(\sum \bar{x}_i\right)^2}{k}}{k - 1} \right]$$

$S_E{}^2 = 468$ $\quad$ $k - 1 = 5$ graus de liberdade.

Determinando S_D^2:

$$S_D^2 = \frac{(N_1 - 1)S_1^2 + (N_2 - 1)S_2^2 + \ldots + (N_k - 1)S_k^2}{(N_1 - 1) + (N_2 - 1) + (N_3 - 1) + \ldots + (N_k - 1)}$$

$$S_D^2 = \frac{(30-1)(173,2) + (30-1)(168,7) + \ldots + (30-1)(167,6)}{180-6}$$

$$S_D^2 = 170,2 \text{ com } 174 \text{ graus de liberdade.}$$

Aplicando-se o teste, temos:

$$F = \frac{S_E^2}{S_D^2} = \frac{468}{170,2} = 2,75 \quad \begin{cases} \delta_1 = 5 \text{ graus de liberdade do numerador} \\ \delta_2 = 174 \text{ graus de liberdade do denominador} \end{cases}$$

Note que, neste teste, S_E^2 sempre fica no numerador e S_D^2 no denominador.

Utilizando-se a estatística tabelada F a 5% tem-se que $F_{(5,174);\ 5\%} = 2{,}21$, onde $F_{alc} > F_{tab}$, onde a Hipótese H_0 é rejeitada, isto é, existe pelo menos 1 média diferente das demais.

EXPERIMENTOS INTEIRAMENTE AO ACASO (AMOSTRAS DE MESMO TAMANHO)

As hipóteses básicas à aplicação da ANOVA são de que:

- as K populações tenham a mesma variância σ^2 - condição de homocedasticidade;
- a variável de interesse seja normalmente distribuída em todas as populações.

- A idéia, na análise de variância (ANOVA), é comparar a variação devida aos tratamentos com a variação devida ao acaso ou resíduo.

Tabela 01 - Experimento inteiramente ao acaso

	Tratamento					Total
	1	**2**	**3**	**...**	**k**	
	y_{11}	y_{21}	y_{31}		y_{k1}	
	y_{12}	y_{22}	y_{32}		y_{k2}	
	y_{13}	y_{23}	y_{33}		y_{k3}	
	.	.	.		.	
	.	.	.		.	
	.	.	.		.	
	y_{1r}	y_{2r}	y_{3r}	...	y_{kr}	
Total	T_1	T_2	T_3	...	T_k	$\Sigma T = \Sigma y$
Nº de repetições	r	r	r	...	r	$n = kr$
Média	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	...	$\bar{y}_k$	

Cálculos para realizarmos uma ANOVA:

a) os graus de liberdade:

tratamentos = $k - 1$;

total = $kr - 1$;

resíduo = $k(r-1)$.

b) Fator de correção:

$$C = \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}$$

c) a soma de quadrados total:

$$SQ_{Tot} = \sum y^2 - C$$

d) a soma de quadrados de tratamentos:

$$SQ_{Trat} = \frac{\sum T^2}{r} - C$$

e) a soma de quadrados de resíduo:

$$\mathrm{SQ_{Res} = SQ_{Tot} - SQ_{Trat}}$$

f) o quadrado médio de tratamento:

$$QM_{Trat} = \frac{SQ_{Trat}}{k-1}$$

g) o quadrado médio de resíduo:

$$QM_{Res} = \frac{SQ_{Res}}{k(r-1)}$$

h) o valor de F:

$$F = \frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}}$$

Quadro da ANOVA de um experimento inteiramente ao acaso

Causas de variação	SQ	GL	QM	F
Tratamentos	SQ_{Trat}	$k - 1$	$QM_{Trat.}$	$F = \frac{QM_{Trat.}}{QM_{Res.}}$
Resíduo	$SQ_{Res.}$	$k(r - 1)$	$QM_{Res.}$	
Total	$SQ_{Tot.}$	$kr - 1$		

Note que os quadrados médios são obtidos dividindo as somas de quadrados pelos respectivos graus de liberdade.

Para testar as hipóteses é utilizada a estatística F de Snedecor, com (k – 1) graus de liberdade no numerador e k . (r – 1) graus de liberdade no denominador.

Se $F_c > F_{\alpha, \delta 1, \delta 2}$ rejeita-se H_0 e conclui-se que existe pelo menos uma média que difere de outra.

Se $F_{calc} > F_{tab}$, rejeitar H_0.

Neste caso dizemos que existem diferenças Estatisticamente significativas entre as médias.

Se $F_{calc} < F_{tab}$, não rejeitar H_0.

Quando isso ocorre, dizemos que não existem evidências estatísticas de que as médias sejam diferentes.

O p-valor

Um procedimento de teste equivalente usa a probabilidade de significância (p-valor), a qual é calculada pela maioria dos programas estatísticos.

O p-valor representa a probabilidade de ser obtida uma observação da distribuição F com $k - 1$ e $k(r - 1)$ graus de liberdade maior ou igual ao valor observado pela F_{calc}. Note que se o p-valor for menor que α, rejeitamos H_0.

Se p-valor < α, rejeita-se H_0.

Em outras palavras, o p-valor é a probabilidade, sob H_0, de ocorrência do valor particular observado para a estatística de teste ou de valores mais extremos. A probabilidade de significância de um teste mede a força da evidência contra H_0 em uma escala numérica. Um p-valor pequeno indica uma forte justificativa (evidência) para a rejeição de H_0.

Exemplo 3.1

Suponhamos que um pesquisador conduziu um experimento inteiramente ao acaso em um conjunto de dados que se pressupõe que sejam normalmente distribuídos e que possuem homocedasticidade. O interesse do pesquisador é avaliar se existe uma diferença significativa entre os tratamentos T_1, T_2 e T_3. Como você ajudaria este pesquisador por meio da ANOVA utilizando um nível de significância de 5%?

	T_1	T_2	T_3	**Total**
	3	11	16	
	5	10	21	
	4	12	17	
Soma	12	33	54	99
Médias	3	11	18	11

Exemplo 3.2

Um fornecedor alimenta a linha de produção de uma determinada indústria com peças em que a sua espessura é medida em milímetros e produzidas pelas máquinas M_A, M_B e M_C, verifique se existe diferença significativa na espessura média destes itens ao nível de 5%.