Testes de Hipóteses

Prof. Adriano Mendonça Souza, Dr.
Departamento de Estatística
- PPGEMQ / PPGEP - UFSM

Testes de hipóteses

- O Teste de Hipótese é uma regra de decisão para aceitar ou rejeitar uma hipótese estatística com base nos elementos amostrais.

- Uma hipótese estatística é uma suposição acerca da distribuição de uma variável aleatória.

A inferência através dos testes de hipóteses se dá quando usamos os resultados extraídos da amostra para testarmos valores de certos parâmetros da população, ou mesmo testarmos

a natureza da população. Podendo ser, testes **paramétricos** ou de **aderência**.

1) Em um exame a que se submeteram estudantes de um grande número de escolas diferentes, o grau médio foi 74,5 e o desvio padrão foi 8. Em uma escola particular em que 200 estudantes foram submetidos a esse exame, o grau médio foi 75,9. Testar a hipótese de que a média é de fato 74,5 contra a alternativa de que a média é diferente de 74,5. Adotar a = 0,05.

2) Uma amostra aleatória de 36 copos de um certo vinho mostrou que tinha um conteúdo médio líquido de 220 ml, com desvio padrão de 26 ml. Testar a hipótese de que $\mu = 225$ ml contra a alternativa $\mu < 225$ ml, com o nível de significância de $\alpha = 0,05$.

Decisão Estatística

É o trabalho baseado em cálculos estatísticos que nos permitem concluir se um determinado valor é válido ou não no fenômeno estudado. Está baseado em hipóteses estatísticas, através dos testes de hipótese.

Conceitos Básicos

1) <u>Distribuição amostral de uma estatística</u>:

É uma distribuição que mostra os resultados esperados, visto que as condições de tamanho da amostra estatística usada e o valor do parâmetro são estabelecidos.

2) Erro padrão de uma distribuição amostral: Corresponde ao desvio-padrão de uma distribuição empiricamente obtida. Ele nos dá uma indicação sobre a disperção da distribuição e quanto maior a amostra, menor o erro padrão da amostra.

3) <u>Probabilidade de confiança:</u> Também é denominada intervalo de confiança, é quando podemos estimar a probabilidade de que uma medida populacional realmente recaia dentro do intervalo de valores, centrados na estatística amostral.

4) <u>Valores críticos</u>: São os valores da estatística tabelada, para os diversos níveis de significância determinados mediante o emprego das tabelas de áreas das distribuições (Z, t , F) e de outras tabelas estatísticas não paramétricas.

5) Hipótese estatística: É aquilo que queremos validar através de testes estatísticos.

Hipótese nula (H_0): Enunciado que sustenta quaisquer diferenças entre duas observações, é a hipótese inicial. É aquela que vai ser testada.

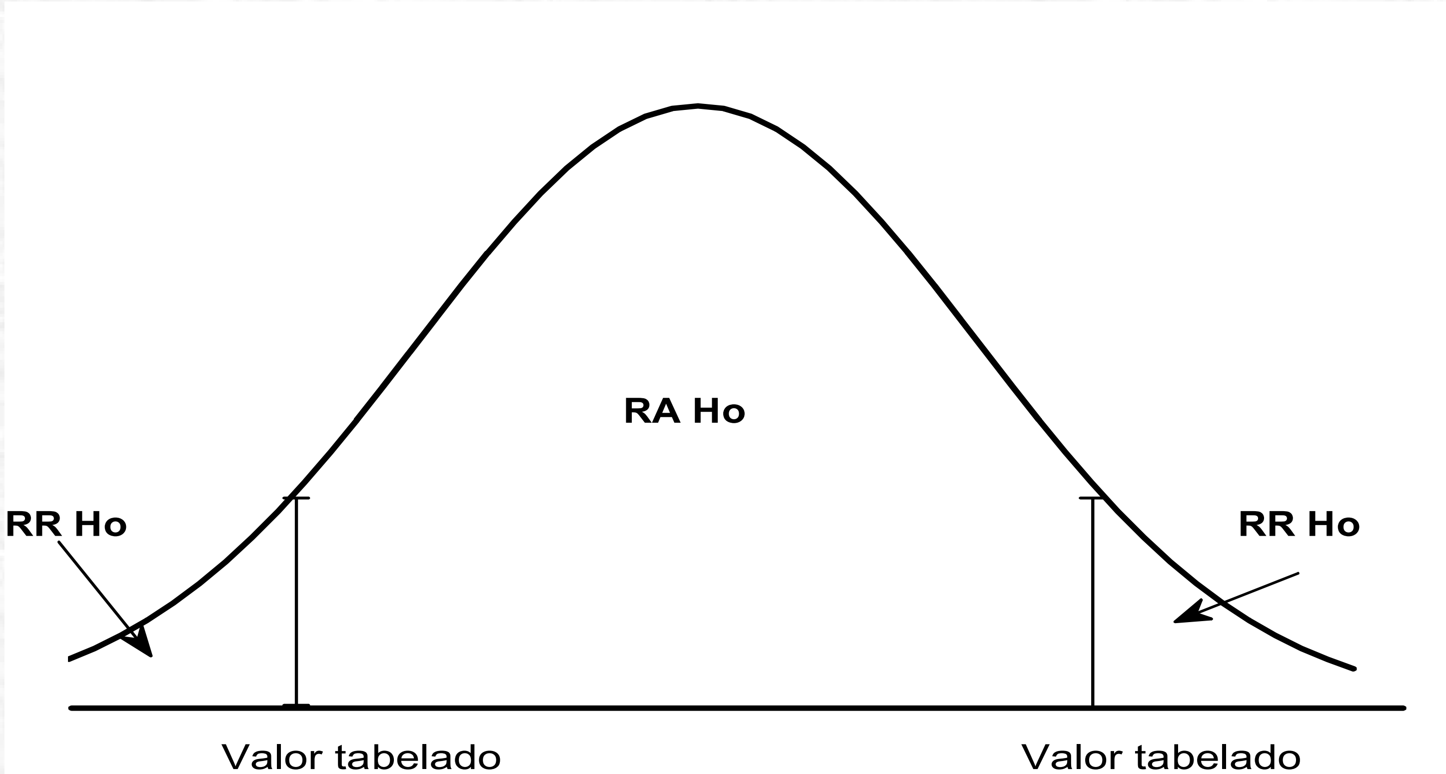
Hipótese alternativa (H_1): É a hipótese contrária a hipótese nula, ou seja, é a hipótese alternativa.

Testes de hipótese

6) <u>Testes de hipótese</u> ou de significância ou regra de decisão são processos que nos habilitam a aceitar ou rejeitar hipóteses, ou a determinar se a amostra observada difere de modo significante dos resultados esperados.

Teste de hipótese bilateral ou bicaudal: São os que consideramos ambas as extremidades da distribuição por amostragem como zonas de rejeição.

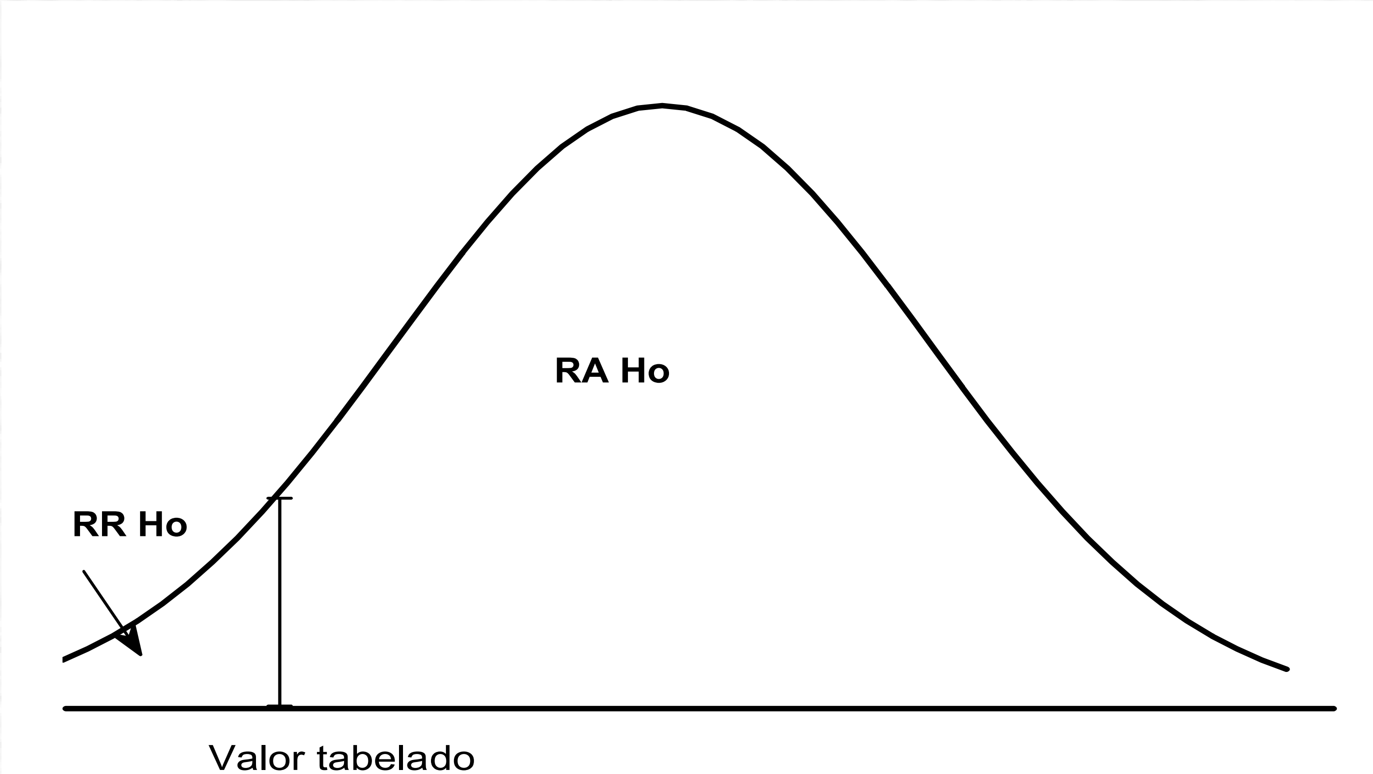
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$



Testes unilaterais: São os que consideramos apenas uma extremidade da distribuição por amostragem como zona de rejeição.

Unilateral à esquerda :

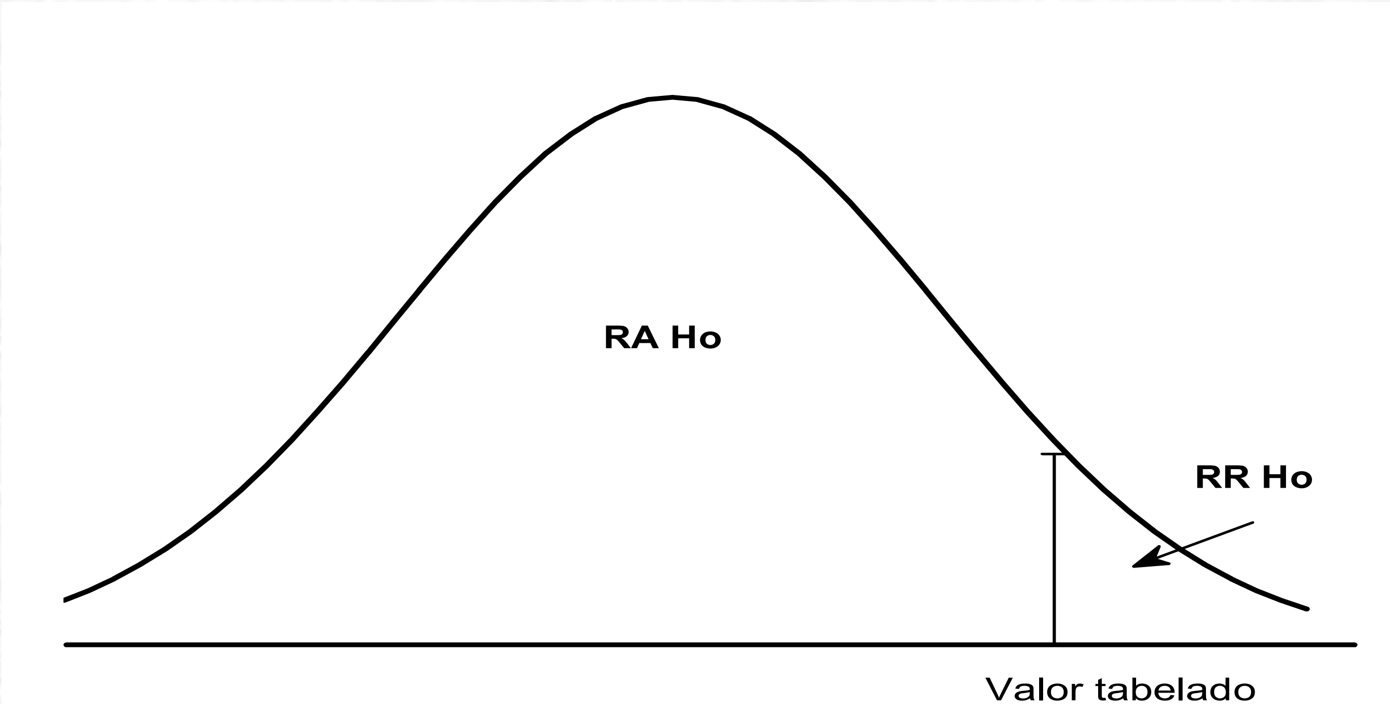
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$



RR: significa a região de rejeição da hipótese nula (H_0) e
RA: significa a região de aceitação da hipótese nula (H_0)

Unilateral à direita:

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$



RR: significa a região de rejeição da hipótese nula (H_0) e
RA: significa a região de aceitação da hipótese nula (H_0)

7) Nível de significância (é a área de RR):

É a máxima probabilidade de rejeitar H_0 sendo verdadeira. Esta probabilidade α (alfa) é especificada antes da extração da amostra de modo que os resultados não influenciam na escolha. Na prática usamos $\alpha = 1\%$ ou 5%.

8) Erros:

Erro tipo I: Quando a hipótese H_0 é rejeitada e é verdadeira. Pode ser limitado pela escolha de α .

Erro tipo II: É o erro cometido quando aceitamos uma hipótese nula falsa = β (potência do teste).

Realidade	Decisão	
	Aceitar H_0	Rejeitar H_0
H_0 (é verdadeira)	Decisão correta $(1 - \alpha)$	Erro tipo I (α)
$\mathbf{H_0}$ (é falsa)	Erro tipo II (β)	Decisão correta $(1 - \beta)$

Rejeitar H_0 é considerado o erro mais sério, do que erroneamente aceitar .

Em controle estatístico de qualidade as probabilidades α e β dos erros tipo I e II são denominados respectivamente risco do produtor e risco do consumidor.

- α - É o risco do produtor, ver rejeitado um bom lote fornecido,
- β- É o risco do consumidor de aceitar um lote fora das especificações.

9) <u>Graus de liberdade</u>: Referem-se a liberdade de variação de um conjunto de escores, por exemplo: uma amostra com 6 elementos, 5 podem variar e 1 fica fixo, Logo os graus de liberdade podem ser representados por *gl* = (N –1).

Procedimento para se efetuar um teste de hipóteses

1º) Enunciar as hipóteses H_0 e H_1;

2º) Fixar o limite de erro α e identificar a variável do teste;

3º) Determinar as áreas de aceitação (RA) e rejeição (RR) em função do nível α pelas tabelas estatísticas;

4º) Por meio dos elementos amostrais avaliar o valor da variável do teste;

5º) Concluir pela aceitação ou rejeição.

6º) Elaborar uma conclusão em relação ao problema que está sendo testado.

TESTES PARAMÉTRICOS

São testes de hipótese que impõe exigências, tais como: igualdade de variância das populações, distribuição normal das variâncias e a escala de mensuração da variável de ser no mínimo intervalar.

1.a)Teste para a média

σ^2 conhecida (n > 30):

1º)

$$H_0 : \mu = \mu_0;$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0;$$
$$H_1 : \mu > \mu_0;$$
$$H_1 : \mu < \mu_0.$$

2º) Fixar o nível de significância de α

3º)

$$\boxed{z_c = \frac{\overline{X} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

onde: $\overline{X}$:média amostral

μ_0 : valor da hipótese nula

σ : desvio-padrão

Exemplo:

O desvio-padrão da população é conhecido e igual a 22 unidades. Se uma amostra de 100 elementos retirados dessa população forneceu média 115,8 podemos afirmar que a média dessa população é inferior a 120 unidades, ao nível de significância de 5%.

1.b) Teste para a média

σ^2 desconhecido ($n \leq 30$)

$$t_c = \frac{\overline{X} - \mu_o}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$$

Onde:

s : desvio-padrão da amostra

$\overline{X}$: média amostral

μ_0 : valor da hipótese nula

n : tamanho da amostra

Exemplo:

Uma certa máquina produzia arruelas que tinham a espessura de 0.05 polegadas. Para se verificar se a máquina está trabalhando adequadamente escolheu-se uma amostra de 10 arruelas cuja a espessura média foi de 0.053 polegadas e cujo o desvio-padrão foi de 0.003 polegadas. Testar a hipótese da máquina estar trabalhando adequadamente, usando α=0.01.

Exemplo:

Os registros dos últimos anos de um colégio, atestam para os calouros admitidos a nota média 115 (teste vocacional). Para testar a hipótese de que a média da nova turma é a mesma, tirou-se, ao acaso, uma amostra de 20 notas, obtendo-se a média 118 e S=20. Admitindo-se $\alpha = 0.05$, faça o teste de hipótese.

2) Teste para a proporção

$$H_0 : p = p_0$$
$$H_1 : p \neq p_0$$
$$p > p_0$$
$$p < p_0$$

$$Z_c = \frac{p - p_0}{\sqrt{\dfrac{(p_0 . q_0)}{n}}}$$

Onde:

p: Freqüência relativa do evento da amostra, logo $p = \dfrac{x}{n}$

p_0 : valor na hipótese nula

n: tamanho da amostra

- A variável escolhida é a normal padronizada Z. É conveniente verificarmos as condições de aproximação da binomial pela normal.

- Se n . p . q > 25, então a aproximação é “boa”, em geral quando n > 30, a variável Z é escolhida.

Exemplo:

Um comprador, ao receber de um fornecedor um grande lote de peças, decidiu inspecionar 200 delas. Decidiu também que o lote será rejeitado se ficar convencido ao nível de 5% de significância, de que a proporção das peças defeituosas no lote é superior a 4%. Qual será a sua decisão, (aceitar ou rejeitar o lote), se na amostra foram encontradas 11 peças defeituosas?

Exemplo:

Desconfiando-se que uma moeda fosse viciada realizou-se um experimento que constitui de lançar esta moeda 100 vezes. Obtiveram-se 59 caras ao nível de 5%. Pode-se afirmar a existência de vício na moeda?

3) Teste para a diferença entre duas proporções populacionais p_1 e p_2

Estatística calculada:

$$\boxed{Z_c = \frac{(p_1 - p_2) - \Delta}{\sqrt{\dfrac{p_1 q_1}{n_1} + \dfrac{p_2 q_2}{n_2}}}}$$

$$H_0 = p_1 = p_2$$

$$H_1 = p_1 \neq p_2$$

$$p_1 < p_2$$

$$p_1 > p_2$$

Onde:

$\Delta = 0$, no caso do teste de hipótese de igualdade entre duas proporções;

Z_{tab} =valor da tabela da distribuição normal padronizada o qual depende de α ;

n_1 e n_2 > 30.

Exemplo:

Numa pesquisa de opinião, 32 dentre 80 homens declarararam apreciar certa revista, acontecendo o mesmo com 26 dentre 50 mulheres. Ao nível de 5% de significância, os homens e as mulheres apreciam igualmente a revista?

4) Teste para a diferença de duas médias

a) σ^2 conhecida ($n_1 \neq n_2$ / dados não emparelhados)

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d \quad ou \quad \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad ou \quad \mu_1 - \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d \quad ou \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad ou \quad \mu_1 \neq \mu$$

Neste teste podemos comparar a eficácia de 2 tratamentos diferentes ou testar a eficácia de uma nova terapia em relação a um método terapêutico atualmente em uso. Ao grupo que se aplica o novo método, novo medicamento chamaremos grupo experimental enquanto que ao grupo que recebe o método comum ou medicamentos usuais, chamaremos grupo controle.

- Escolhe-se a variável normal padronizada Z,

$$(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \overset{d}{\cong} N\left(\mu_1 - \mu_2 ; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$Z_c = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Exemplo:

Uma máquina automática enche latas com base no peso líquido com um desvio-padrão de 5 gr. Duas amostras retiradas em dois períodos de trabalho consecutivo de 10 e 20 latas, forneceram pesos líquidos médios de 184,6 e 188,9 gr. respectivamente. Desconfia-se que a regulagem da máquina, quanto ao peso médio fornecido possa Ter sido modificado entre a coleta das duas amostras. Qual a conclusão a um nível de 1%?

Exemplo:

Um fabricante de pneus faz dois tipos. Para o tipo A, τ = 2500 milhas, e para o tipo B, τ = 3000 milhas. Um táxi testou 50 pneus do tipo A e 40 do tipo B, obtendo 24000 milhas e 26000 milhas de duração média dos respectivos tipos. Adotando-se um risco , testar a hipótese de que a vida média dos dois tipos é a mesma.

b) σ^2 desconhecidas e iguais

$$\boxed{t_c = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s'\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}} \rightarrow \delta = n_1 + n_2 - 2$$

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

$\rightarrow$ desvio-padrão comum

Exemplo:

Duas amostras de barras de aço ambas de tamanho $n = 5$, foram ensaiadas e obteve-se que as resistências médias foram 55 $(kg/mm^2)^2$ e 53 $(kg/mm^2)^2$ e as variâncias das resistências foram de 7,5 e 5,0 , respectivamente.

Há evidência, ao nível de significância de 5% de que a resistência média da 1ª amostra seja maior que a 2ª amostra.

Exemplo:

Dois tipos de linhas foram testados sob as mesmas condições meteorológicas. O tipo A registrou média de 80 com um desvio de 5 *m* em 5 partes. O tipo B uma média de 83 com um desvio de 4 *m* em 6 partes. Adotando-se $\alpha = 0{,}05$, testar a hipótese da igualdade das médias.

c) σ^2 desconhecidas e desiguais

$$t_c = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{v_1 + v_2}}$$

$t_{\delta,\alpha}$ -valor tabelado

$$V_1 = \frac{s_1^2}{n_1}$$

$$V_2 = \frac{s_2^2}{n_2}$$

$$\delta = \frac{(V_1 + V_2)^2}{\frac{V_1^2}{n_1 + 1} + \frac{V_2^2}{n_2 + 1}} - 2$$

Exemplo:

De uma pequena classe do curso colegial pegou-se uma amostra de 4 provas de matemática e obteve-se média 81 e variância 2. Outra amostra de 6 provas de biologia forneceu média 77 e variância 14,4. Testar a hipótese de que as médias populacionais para as duas matérias são iguais, com $\alpha = 5\%$.

5) Teste para a diferença entre duas amostras dependentes – Teste T pareado

- Neste teste, as observações aparecem aos pares, sendo que a média e o desvio padrão são calculados utilizando-se, como dados, os valores das diferenças (d_i) entre cada par.

- Hipóteses: $H_0 : \mu_d = \mu_0$ e $H_1 : \mu_d \neq \mu_0, ou$

$$H_1 : \mu_d > \mu_0, ou$$

$$H_1 : \mu_d < \mu_0.$$

- Estatística calculada:

$$Z_c = \frac{(p_1 - p_2) - \Delta}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

Onde:

$\Delta = 0$, no caso do teste de hipótese de igualdade entre duas proporções;

$Z_{tab} =$ valor da tabela da distribuição normal padronizada o qual depende de α ;

n_1 e n_2 >30.

Exemplo:

Dez cobaias adultas foram submetidas ao tratamento com certa ração durante uma semana. Os animais foram perfeitamente identificados, tendo sido mantidos, para tanto, em gaiolas individuais. Os pesos, em gramas, no princípio e no fim da semana, designados respectivamente por x_i e y_i , são dados a seguir.

- Ao nível de 1% de significância, podemos concluir que o uso da ração contribuiu para o aumento do peso médio dos animais?

Cobaia	*X i*	*Y i*
1	635	640
2	704	712
3	662	681
4	560	558
5	603	610
6	745	740
7	698	707
8	575	585
9	633	635
10	669	682

6) *Teste para a variância populacional* σ^2

$$X_c^2 = \frac{(n-1).s^2}{\sigma_0^2}$$

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$\sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$\sigma^2 < \sigma_0^2$$

A variável escolhida é a x^2, com n- 1 graus de liberdade.

Exemplo:

Uma amostra de 10 elementos de uma população forneceu variância igual a 24,8. Pergunta-se: esse resultado é suficiente para se concluir ao nível de $\alpha = 5\%$ que a variância dessa população é inferior a 50?

Exemplo:

Numa amostra aleatória de 20 elementos obteve-se $s^2 = 64$. Testar a hipótese de que $\sigma^2 = 36$ ao nível de significância de 10%.

7) Teste para igualdade de variâncias populacionais σ_1^2 e σ_2^2

Para a realização deste teste, é necessário definirmos uma nova distribuição de probabilidade: a distribuição F de 'Snedecor'.

A distribuição F é a razão de duas variáveis independentes, cada uma das quais distribuídas com X_m^2. As duas distribuições podem ou não se basear no mesmo número de graus de liberdade, isto é, os "m" podem ser diferentes. Assim:

$$F(m, p) = \frac{\dfrac{x^2 m}{m}}{\dfrac{x^2 p}{p}} = \frac{x^2 m}{x^2 p} \cdot \frac{p}{m}$$

‘F’ tem distribuição F de ‘Snedecor’ com m graus de liberdade no numerador e p graus de liberdade no denominador.

Existe uma distribuição F diferente para cada combinação possível de graus do numerador e denominador. Existem tabelas que nos fornecem abscissas para vários graus de liberdade do numerador e denominador.

- Eis o procedimento:

1º) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 = \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

2º) Fixa-se α . A variável escolhida é a 'F' de 'Snedecor' com $m = (n_1 - 1)$ graus de liberdade no numerador e $p = (n_2 - 1)$ graus de liberdade no denominador.

3º) Determina-se RA e RC

4º) Cálculo da variável:

$$\boxed{F = \frac{s_1^2}{s_2^2}}$$

5º) Conclusão:

Se $F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m, p)$ ou $F > F_{\frac{\alpha}{2}}(m, p)$

ou $F > F_2(m, p)$ ou $F < F_{1-\alpha}(m, p)$,

rejeita-se H_0 .

- Para encontrarmos $F_1 - \alpha(m, p)$, calculamos assim:

$$\boxed{F_1 - \alpha(m, p) = \frac{1}{F\alpha(p, m)}}$$

- No caso da tabela não apresentar o grau de liberdade procurado, utiliza-se o valor mais próximo.

Exemplo:

Dois programas de treinamento de funcionários foram efetuados. Os 21 funcionários treinados no programa antigo apresentaram uma variância 146 em suas taxas de erro. No novo programa, 13 funcionários apresentaram uma variância de 200. Sendo $\alpha = 5\ \%$, pode-se concluir que a variância é diferente para os dois programas.