

INTRODUÇÃO A PROJETOS DE EXPERIMENTOS

Caderno Didático

Projeto gráfico da capa:

Laboratório de Design Gráfico
Curso de Desenho Industrial / Programação Visual - UFSM

INTRODUÇÃO A PROJETOS DE EXPERIMENTOS

Caderno Didático

Adriano Mendonça Souza

DOUTOR EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO/UFSC
PROF. ADJUNTO DO DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA/UFMS
PROF. DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA/UFMS
PROF. DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Anelena Bragança de Moraes Ethur

MESTRE EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO/UFMS
PROF.^a ASSISTENTE DO DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA/UFMS
PROF.^a DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA/UFMS

Luis Felipe Dias Lopes

DOUTOR EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO/UFSC
PROF. ADJUNTO DO DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA/UFMS
PROF. DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA/UFMS
PROF. DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Roselaine Ruviano Zanini

MESTRE EM MÉTODOS QUANTITATIVOS/UFMS
PROF.^a ASSISTENTE DO DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA/UFMS
PROF.^a DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA/UFMS

Universidade Federal de Santa Maria – UFMS
Centro de Ciências Naturais e Exatas – CCNE
Departamento de Estatística
Santa Maria - RS
Setembro – 2002

I61 Introdução a projetos de experimentos : caderno didático / Adriano Mendonça Souza...[et al.]. – Santa Maria : Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Departamento de Estatística, 2002. 119+8 p.

1. Estatística matemática 2. Análise estatística
3. Probabilidade 4. Análise de variância 5. Pesquisa
6. Experimentos 7. Testes I. Souza, Adriano Mendonça

CDU 519.2:311.212

Ficha catalográfica elaborada por
Maristela Hartmann CRB-10/737
Biblioteca Central da UFSM

PREFÁCIO

A idéia de escrever um material didático sempre faz parte do objetivo da maioria dos professores, principalmente no momento de preparar aulas e direcionar determinado assunto para um público alvo específico. Esta monografia foi escrita com o propósito de atender às necessidades dos alunos do Mestrado em Engenharia de Produção e Especialização em Estatística e Modelagem Quantitativa da Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, como um texto introdutório em Projetos de Experimentos. Temos a clara visão que a consulta em textos mais avançados será de grande valia para os alunos e profissionais que se utilizam desta ferramenta.

Agradecemos durante a realização deste trabalho ao apoio recebido dos colegas de trabalho e alunos que foram capazes de salientar os erros que haviam. Os possíveis erros que ainda persistirem nesta versão e as sugestões para o melhoramento deste material deve ser enviadas para depest@ccne.ufsm.br em nome dos autores, os quais ficarão muito gratos.

O nosso agradecimento também vai para o Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção e Curso de Especialização em Estatística e Modelagem Quantitativa, pois sem eles não teríamos a necessidade de gerar tal material. Agradecemos também ao Gabinete de Projetos do CCNE pela parcial contribuição financeira o desenvolvimento deste projeto de extensão.

Os autores

SUMÁRIO

Capítulo 1	INTRODUÇÃO	1
1.1.	ORIGEM	2
1.2.	DEFINIÇÕES	3
Capítulo 2	DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS	11
2.1.	EXPERIMENTOS INTEIRAMENTE AO ACASO	12
2.1.1.	Número igual de repetições	12
2.1.2.	Número diferente de repetições	13
2.2.	EXPERIMENTOS EM BLOCOS AO ACASO	13
2.2.1.	Sem repetições	13
2.2.2.	Com repetições	15
2.2.3.	Um caso especial de experimentos em blocos ao acaso	16
2.3.	EXPERIMENTOS EM QUADRADO LATINO	17
2.4.	EXPERIMENTOS ROTACIONAIS	18
Capítulo 3	ANALISE DE VARIÂNCIA - ANOVA	19
3.1.	UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO	20
3.2 –	EXPERIMENTOS INTEIRAMENTE AO ACASO (com igual número de repetições)	24
3.3 –	EXPERIMENTOS INTEIRAMENTE AO ACASO (com diferente número de repetições)	36
Capítulo 4	COMPARAÇÃO DE MÉDIAS	41
4.1.	AMOSTRAS DE MESMO TAMANHO	41

Capítulo 9	EXERCÍCIOS REVISIONAIS (Teóricos - Resolvidos)	93
Capítulo 10	EXERCÍCIOS REVISIONAIS (Práticos - Resolvidos)	99
Capítulo 11	EXERCÍCIOS REVISIONAIS (Propostos)	109
Capítulo 12	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117
ANEXOS		121

1 – INTRODUÇÃO

É uma parte da estatística probabilística que estuda o planejamento, execução, coleta de dados, análise e interpretação dos resultados provenientes de experimentos. A experimentação é uma ciência que oferece suporte probabilístico, ao pesquisador, permitindo fazer inferências sobre o comportamento de diferentes fenômenos da natureza, com grau de incerteza (margem de erro) conhecido.

Todo pesquisador necessita dos conhecimentos das técnicas experimentais para: planejar, executar, avaliar, analisar e interpretar os resultados de um experimento. Já o técnico (usuário dos resultados da pesquisa) deverá conhecer a experimentação para entender o experimento e avaliar a confiabilidade dos resultados, permitindo, assim, uma troca de idéias com o pesquisador, através de uma linguagem técnica adequada.

Muito do conhecimento, que a humanidade acumulou ao longo dos séculos, foi adquirido através da experimentação. A idéia de experimentar, no entanto, não é apenas antiga, também pertence ao dia-a-dia. Todos já aprenderam algumas coisas, ao longo da vida, experimentando. A experimentação, no entanto, só se difundiu, como técnica sistemática de pesquisa, neste século, quando foi formalizada através da estatística.

A necessidade do ser humano em conhecer e descobrir, reinventar e criar produtos e processos, com maior qualidade, fez com que o experimentar se tornasse parte do seu cotidiano.

Inicialmente, o homem começou a testar e realizar experiências para verificar o que de melhor ele extrairia de uma situação, por exemplo, o que seria melhor para uma determinada estação de trabalho, melhores equipamentos, melhor matéria prima, melhor equipe de trabalho e as variáveis irão surgindo e necessitando de uma resposta.

Ao longo do tempo, essas inquietações foram respondidas por meio da sumarização dessas respostas e aplicações de métodos estatísticos, capazes de mostrar a melhor solução.

Hoje, são realizados experimentos em quase todas as áreas de trabalho, sendo esses universais e tendo aplicação em diferentes áreas como: Agronomia, Medicina, Engenharia, Psicologia, entre outras, sendo que os métodos de análise são realizados na mesma maneira. De qualquer forma, convém conhecer as origens da experimentação, porque isso ajudaria na compreensão de termos técnicos.

1.1 - ORIGEM

Boa parte da formalização, que existe hoje em experimentação deve-se a Sir Ronald A. Fisher (1890-1962), um estatístico que trabalhou na Estação Experimental de Agricultura de Rothamstead, na Inglaterra. É a origem agrícola da experimentação que explica o uso de vários termos técnicos.

Como o objetivo da pesquisa é verificar, cientificamente, as suas conseqüências, um planejamento de experimentos é fundamental para organizar a forma como esses experimentos serão considerados, pois após o seu planejamento um método estatístico deverá ser utilizado para testar as hipóteses propostas.

1.2 - DEFINIÇÕES

Experimento é um procedimento *planejado*, partindo de uma hipótese, que visa *provocar fenômenos em condições controladas*, observar e analisar seus resultados.

- *planejado* – indica que o pesquisador mantém o controle sobre o experimento, onde qualquer ação deve ser pré-definida ou prevista.
- *provocar fenômenos* – escolher diferentes maneiras, procedimento, técnicas, para resolver um determinado problema.
- *condições controladas* – refere-se que somente as diferentes alternativas (fatores ou tratamentos) podem variar e as demais condições deverão manter-se constantes, salvo os erros não controláveis.

Para o bom entendimento da metodologia, será necessário a descrição de alguns conceitos:

Um experimento é constituído, basicamente, por um conjunto de unidades experimentais, sobre as quais são aplicados os tratamentos, de forma causalizada, das quais se obtêm os dados experimentais.

- **Tratamento**

Foi introduzido em experimentação através da área agrícola. Servia para indicar o que estava em comparação: fertilizantes, inseticidas, variedades. Hoje, o termo **tratamento** tem significado mais geral. Muitos experimentos são feitos para **comparar** máquinas, métodos, produtos ou materiais.

Refere-se a cada uma das alternativas de um fator em estudo para resolver um dado problema. São os diferentes níveis, ou variáveis independentes, de um modelo matemático. É a variável que expressa o problema a ser resolvido. Num experimento existem, pelo menos, dois tratamentos. Esses podem ser ou qualitativos, ou quantitativos.

Exemplo:

Quantitativos: altura - 10cm, 20cm, 30cm
idade - 2 anos, 3 anos, 5 anos
tempo - 30min., 1h, 1h e 30 min.

Qualitativos: sexo (masculino e feminino), turma (A, B, C e D)

Em resumo:

“tratamento é qualquer procedimento, ou conjunto de procedimentos, cujo efeito deverá ser avaliado e comparado com outros”.

• Variáveis respostas

São obtidas por medição ou contagem. Não devem ser confundidas com os tratamentos, que são as variáveis que estão sendo comparadas.

Exemplo:

Quantitativos: altura (10cm, 20cm, 30cm) - número de folhas,
- espessura
idade (2 anos, 3 anos, 5 anos) - número de dentes
- diâmetro
tempo (30min, 1h, 1h e 30 min.) - distância percorrida

Qualitativos: sexo (masculino e feminino) - idade, altura, peso
turma (A, B, C e D) – notas

Fatores e níveis

Para explicar os fatores e níveis, utilizar-se-á o exemplo a seguir:

Um pesquisador está interessado em estudar o efeito de vários tipos de ração que diferem, pela quantidade de potássio, no aumento de peso de determinado tipo de animal.

Esse objetivo pode ser atingido se planejar a pesquisa com uma das seguintes finalidades:

- a) comparar as médias dos aumentos de peso obtidas, com cada uma das rações (igualdade de médias):
- b) estabelecer uma relação funcional, entre o aumento de peso médio e a quantidade de potássio.

No exemplo, a variável independente “ração” é um **fator** e os tipos de ração são os níveis deste fator, ou **tratamentos**.

- **Parcela**

O termo parcela foi criado para designar a unidade de área usada no experimento. Essa unidade de área era, originalmente, uma faixa de terra, mas também podia ser um vaso ou uma planta. Mas, atualmente, dependendo do experimento, a parcela pode ser um animal, uma peça fabricada, uma pessoa, etc. Muitos autores, no entanto, passaram a usar o termo unidade experimental, no lugar de parcela, de forma mais abrangente.

- **Unidade experimental - UE**

É a menor unidade de um experimento, na qual é aplicado um tratamento. Em experimentos de campo, as unidades experimentais são denominadas *parcelas*. As parcelas irão

dependem do número de tratamentos e do número de repetições dos tratamentos.

I = número de Tratamentos

J = número de Repetições

IJ = número de Unidades Experimentais ou número de Parcelas

Para se estudar o efeito dos tratamentos é necessário a quantificação do erro experimental (variância entre os valores observados nas UE que receberam o mesmo tratamento). Para se obter uma estimativa razoável, para o erro, será necessário um número razoável de graus de liberdade do erro. Aconselha-se um número mínimo de EU, igual a 20, para se obter um grau de precisão desejado.

- **Grupo controle**

É o grupo que não recebe o tratamento para se efetuar as comparações. O uso de grupo controle já está consagrado em experimentação. Nas áreas Médica e Paramédica, no entanto, é preciso discutir a ética de constituir o grupo controle. As pessoas submetidas, aos experimentos, não devem correr o risco de sofrer danos graves. Então, a constituição de um grupo controle, nos experimentos feitos nas áreas médica e paramédica dependem, basicamente, do que está em estudo.

Na área agrícola não surgem questões de natureza ética quando se sorteia o tratamento. Por exemplo, para verificar se um adubo tem efeito sobre a produção de uma planta, o pesquisador pode sortear as unidades que vão receber o adubo – grupo tratado – e as que não vão receber o adubo – grupo controle – sem enfrentar qualquer problema de natureza ética. Já em medicina a idéia de “sortear” os pacientes que irão receber o tratamento pode levantar questões de ética.

- **Repetição**

A idéia, em experimentação, é comparar grupos, não apenas unidades. As unidades experimentais do mesmo grupo recebem, em estatística, o nome de repetições ou réplicas.

O número de repetições, que devem ser usadas em determinado experimento, pode ser calculado através de fórmulas. A aplicação de tais fórmulas exige, no entanto, que o pesquisador tenha informações estatísticas de experimentos anteriores, o que, em geral, não acontece. Mas o importante é a variabilidade do material experimental. Quanto mais homogêneo, menor é o número de repetições necessárias para mostrar, com clareza, o efeito de um tratamento.

Do ponto de vista do estatístico, é sempre desejável que o experimento tenha um grande número de repetições. Na prática, porém, o número de repetições é limitado pelos recursos disponíveis. De qualquer forma, o pesquisador deve levar em conta – quando estabelece o tamanho de seu experimento – o que é usual na área.

- **Causalidade**

A diferença entre dois grupos só pode ser explicada pelo tratamento quando os grupos são, inicialmente, iguais. Para formar grupos homogêneos, é fundamental que os tratamentos e as unidades experimentais sejam sorteados. É o que os estatísticos chamam de **casualização**. A casualização pode ser feita por meio de sorteio.

Para que a metodologia estatística possa ser aplicada aos resultados de um experimento, é necessário que, em alguma fase do experimento, o princípio da aleatorização esteja presente.

Um outro princípio a ser obedecido é o da repetição, segundo o qual devemos ter repetições do experimento, para que possamos produzir uma medida de variabilidade necessária aos testes da presença de efeitos de tratamentos, ou à estimação desses efeitos.

A casualização pode ser feita através de números aleatórios, obtidos em tabelas estatísticas, calculadoras ou em computadores. O uso de tabelas de números aleatórios pode parecer uma sugestão mais séria do que o jogo de moedas, mas a lógica é a mesma. De qualquer forma, o que importa é entender que os tratamentos devem ser designados às unidades experimentais por puro e simples sorteio – a escolha da técnica da casualização fica a critério do pesquisador.

O princípio de casualização é uma das maiores contribuições dos estatísticos à ciência experimental. Só a casualização garante que unidades, com características diferentes, tenham igual probabilidade de serem designadas para os dois grupos. Hoje, até em jogos de futebol se reconhece que a escolha do campo por sorteio elimina o favoritismo. Então, é razoável acreditar que dois grupos, formados por sorteio, têm grande probabilidade de serem similares. E se os grupos são similares no início do experimento, é razoável creditar, ao tratamento, uma diferença expressiva que se observe entre os grupos, isto é, uma diferença que não possa ser facilmente atribuída ao acaso.

• Experimentos cegos

É quando as unidades experimentais são objetos, plantas, animal ou material proveniente de plantas ou animais, como folhas de árvores ou peças anatômicas. É importante que o pesquisador pese, meça ou observe cada unidade, sem saber a que grupo pertence essa unidade. Isso evita a tendenciosidade. Nessa fase do experimento, o pesquisador não pode trabalhar sozinho – precisa trabalhar com outro técnico.

- **Experimentos duplamente cegos**

São os experimentos feitos com pessoas, em que se recomendam, ainda, outros cuidados. Primeiro, não se deve informar à pessoa o grupo para o qual foi designada; segundo, devem ser mantidos alheios, ao resultado do sorteio, todos os profissionais envolvidos no trato dessas pessoas, para que seus comentários não afetem o seu moral; terceiro, o pesquisador que faz as observações ou medições, deve fazê-lo sem saber a que grupo pertença a pessoa que examina.

É claro que os experimentos que envolvam certos tipos de tratamento, como prótese e psicoterapia, não podem ser do tipo cego, ou duplamente cego. Finalmente, embora os procedimentos duplamente cegos sejam altamente recomendáveis, é necessário, por razões de ética, explicar às pessoas que elas estão sendo submetidas a um experimento. Isso, aliás, já é exigido, por lei, em alguns países.

O plano experimental é mais eficiente quanto maior for o grau de homogeneidade entre unidades experimentais em termos da variável dependente. Se as unidades experimentais são heterogêneas, o número “ n ” de unidades experimentais, necessário para uma boa precisão, pode ser muito grande. Quando esse for o caso, devem-se procurar outros planos experimentais que reduzam o erro experimental. Algumas alterações no planejamento descrito, tais como a introdução de blocos, ou, simplesmente, a utilização de uma variável auxiliar (covariável), medida nas unidades experimentais, a qual é correlacionada com a variável dependente, pode reduzir, consideravelmente, o erro experimental.

2 – DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS

De acordo com o que foi visto anteriormente, para planejar um experimento, é preciso definir a unidade experimental e a variável em análise. Também é preciso definir os tratamentos em comparação e a maneira de designar os tratamentos às unidades. O pesquisador, em geral, identifica, com facilidade, as unidades e os tratamentos que pretende comparar. Pode ser, no entanto, extremamente difícil estabelecer a forma de medir a variável que pretende estudar.

Imagina que um pesquisador quer comparar o efeito de dois analgésicos, utilizando cobaias. É fácil verificar que, nesse experimento, a unidade experimental é uma cobaia submetida a um processo de dor, e os tratamentos, em comparação, são os dois analgésicos. Já a variável em análise, que é o alívio da dor, é difícil de ser medida.

Também é essencial, no planejamento de um experimento, definir a forma de como os tratamentos serão designados às unidades experimentais. No capítulo anterior, insistiu-se na absoluta necessidade da aleatorização, e sugeriu-se designar os tratamentos às unidades experimentais por puro e simples sorteio. Esse procedimento pode encontrar sérias restrições, mas, neste item, são dadas algumas formas alternativas de proceder à casualização, o que define o **delineamento** do experimento.

2.1 - EXPERIMENTOS INTEIRAMENTE AO ACASO

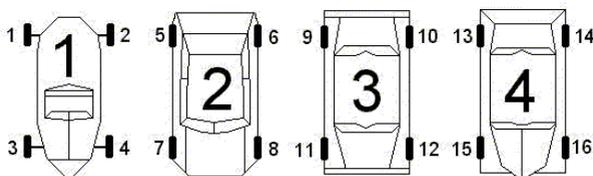
2.1.1 - Número igual de repetições

Para comparar o efeito de três rações, A, B e C, sobre o peso de suínos, um pesquisador dispunha de 12 animais. Sorteou então, a ração A para 4 animais, a ração B para outros 4 e forneceu a ração C para os 4 animais restantes. O **experimento inteiramente ao acaso** é o tipo de delineamento em que os tratamentos são designados às unidades sem qualquer restrição, e este experimento só pode ser conduzido quando as unidades são similares.

Similaridade não significa igualdade, mas que as unidades respondam aos tratamentos de uma mesma forma. Deve-se considerar que, em se tratando de animais, os mesmos tenham o mesmo sexo, a mesma idade e que, no início do experimento, tenham as mesmas características. É bastante comum que, experimentos inteiramente ao acaso, tenham igual número de repetições.

Em um esquema, completamente aleatorizado, as unidades experimentais, que serão submetidas a cada tratamento, são escolhidas completamente ao acaso. Isso significa que cada unidade experimental tem igual probabilidade de receber qualquer um dos tratamentos, não existindo restrição alguma no critério de aleatorização.

Exemplo de experimento inteiramente ao acaso



A hipótese a ser testada é:

Ho: As médias do desgaste, para os 4 tipos de pneus, são iguais

O modelo experimental é dado por:

DESGASTE = CTE + TIPO + ERRO

2.1.2 - Número diferente de repetições

O pesquisador nem sempre dispõe, para seu experimento, de um número de unidades que é múltiplo do número de tratamentos que pretenda estudar. Isso caracteriza o delineamento de um **experimento inteiramente ao acaso com número diferente de repetições**.

Os experimentos inteiramente ao acaso com número diferente de repetições são indicados para o estudo de drogas terapêuticas. Nesses casos, recomenda-se fazer mais repetições no grupo controle do que nos grupos tratados com drogas.

2.2 - EXPERIMENTOS EM BLOCOS AO ACASO

2.2.1 - Sem repetições

O pesquisador só deve optar por experimentos inteiramente ao acaso quando dispuser de número suficientemente grande de unidades experimentais **similares**. Como isso dificilmente acontece na prática, é preciso um delineamento que permita comparar, adequadamente, os tratamentos, mesmo que as unidades apresentem certa heterogeneidade.

Os blocos são formados por unidades similares, o sorteio dos tratamentos é feito dentro de cada bloco. Se o número de unidades similares, que constitui o bloco, é sempre igual ao número de tratamentos, cada tratamento aparece, em cada bloco, uma única vez.

Quando o conjunto U de unidades experimentais for muito heterogêneo (em termos da variável independente), o plano experimental completamente aleatorizado torna-se pouco preciso, porque o erro experimental torna-se muito grande. Em algumas situações dispomos de informações, segundo as quais, antes da realização do experimento, é possível agruparmos as unidades experimentais em subconjuntos de “t” unidades experimentais, mais ou menos homogêneas, onde “t” é o número de tratamentos envolvidos no experimento.

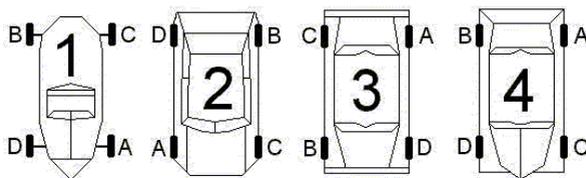
Estes subconjuntos são denominados blocos. Assim, a maior parte da heterogeneidade interna do conjunto U é expressa pela heterogeneidade entre os blocos.

Os experimentos em blocos ao acaso surgiram na área agrícola. O campo era dividido em blocos, e os blocos eram divididos em parcelas. Então, o termo **bloco** designava, originalmente, uma faixa de terra de mesma fertilidade. Se a fertilidade do solo variava ao longo da encosta, isto é, se os solos da parte mais baixa eram os mais ricos, cada faixa que acompanhava uma curva de nível deveria formar um bloco.

O bloco pode ser uma faixa de terra, uma ala da estufa, um período de tempo, uma ninhada, uma partida de produtos industriais, uma faixa de idade, tudo depende do que está em experimentação. O essencial é que os blocos reúnam unidades similares, que se distingam apenas pelo tratamento que recebem, e que haja variabilidade entre blocos. Não teria sentido organizar blocos se não houvesse variabilidade entre eles. Mas, quem decide se a variabilidade entre as unidades justifica, ou não, a formação de blocos, é o pesquisador, não o estatístico.

Quanto maior for a heterogeneidade entre os blocos, maior é a eficiência deste plano experimental em relação ao completamente aleatorizado.

Exemplo de experimento em blocos ao acaso



A hipótese a ser testada é:

H_0 : As médias do desgaste para os 4 tipos de pneus, e para os 4 tipos de carros são iguais

O modelo experimental é dado por:

$DESGASTE = CTE + TIPO + CARRO + ERRO$

2.2.2 - Com repetições

A idéia de construir blocos, para agrupar unidades similares é, simples, mas pode gerar algumas dificuldades. Por exemplo, o número de unidades que caem dentro de um bloco pode ser maior que o número de tratamentos que o pesquisador pretende comparar. Sorteia-se, então, os tratamentos, dentro de cada bloco, tomando-se o cuidado de repetir os tratamentos o mesmo número de vezes. Esse é um **experimento em blocos ao acaso com repetições**.

A análise estatística, dos experimentos em blocos ao acaso com repetições, é relativamente fácil, desde que o número de unidades dentro de cada bloco seja **múltiplo** do número de tratamentos que se pretende comparar.

2.2.3 – Um caso especial de experimentos em blocos ao acaso

Para estudar o efeito de um tratamento, muitas vezes usa-se dois lados da mesma unidade. Por exemplo, para verificar se um tratamento previne cáries, o dentista pode tratar apenas um lado da arcada dentária, de cada paciente, e deixar o outro lado como controle. Também são feitos experimentos em que se mede a mesma unidade duas vezes: uma vez antes, outra vez depois de aplicar o tratamento. Por exemplo, para verificar se determinado exercício físico aumenta o volume do tórax, pode ser feito um experimento em que se toma medidas antes e depois de um período de exercícios regulares.

Toda vez que a pessoa, participante do experimento recebe todos os tratamentos em comparação, essa pessoa é um bloco, não uma unidade. Este tipo de experimento é muito criticado. Por exemplo, a diferença que se mede na pessoa, antes e depois de uma série de exercícios físicos, só seria explicada pelos próprios exercícios?

De qualquer forma, são feitos experimentos em que cada pessoa é um bloco. O pesquisador precisa, apenas, estar alerta para o fato, que é possível, de a pessoa se modificar por qualquer outro motivo, que não o tratamento. Então, se um médico estiver comparando diversas formas de proceder ao diagnóstico, é razoável usar cada paciente como bloco.

Entretanto, se um psicólogo pretender comparar dois testes de inteligência, seria razoável submeter cada pessoa, que participa do experimento, aos dois testes? Um experimento desse tipo merece ser criticado. A pessoa tanto pode aprender a fazer o teste e, nesse caso, o desempenho no segundo teste seria melhor do que no primeiro, como pode se cansar e, nesse caso, o desempenho no segundo teste seria pior do que no primeiro.

Embora os experimentos, em que se toma cada indivíduo como bloco, sejam bastante comuns, é preciso muito senso crítico para planejá-los. Muitas vezes, esses experimentos não têm qualquer validade.

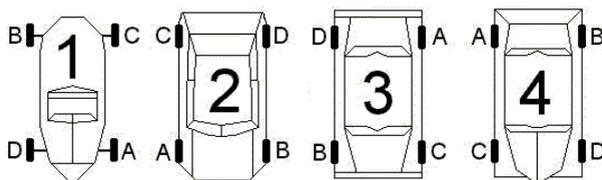
2.3 - EXPERIMENTOS EM QUADRADO LATINO

Os **experimentos em quadrado latino** controlam duas causas de variação, isto é, têm dois tipos de blocos. É fácil entender como se faz o delineamento através de um exemplo prático.

Para fazer o experimento, primeiro organiza-se blocos de animais de mesma raça e depois se organiza blocos de animais de mesmo peso. Então existem blocos em “colunas” e em “linhas”. Os tratamentos são sorteados, mas cada tratamento só deve aparecer uma vez em cada “coluna” e uma vez em cada “linha”.

Os experimentos em quadrado latino não são comuns na prática, devido às restrições do delineamento. Note-se, por exemplo, que o número de unidades experimentais é igual ao quadrado do número de tratamentos, e que o número de linhas, de colunas e de tratamentos são iguais entre si.

Exemplo de experimento em quadrado latino



A hipótese a ser testada é:

Ho: As médias do desgaste para os 4 tipos de pneus, para os 4 tipos de carros e para as 4 posições são iguais

O modelo experimental é dado por:

DESGASTE = CTE + TIPO + CARRO + POS + ERRO

2.4 - EXPERIMENTOS ROTACIONAIS

Os **experimentos rotacionais “cross-over experiments”** também utilizam o princípio dos blocos. Nesse caso, porém, cada participante é um bloco. Um exemplo ajuda a entender a lógica do delineamento: Imagine-se que um dentista quer comparar dois métodos de escovação, A e B. Se cada participante do experimento for tomado como bloco, é preciso sortear a ordem dos métodos: AB ou BA, para cada participante.

Mas o dentista acredita que, se a maioria dos participantes do experimento testar primeiro um dos métodos, por exemplo, o método A, o outro método ficaria favorecido na comparação. Isso porque, esse segundo método seria predominantemente usado por pessoas que já aprenderam a escovar os dentes. Como proceder para que metade dos participantes seja submetida a uma seqüência de tratamentos, por exemplo AB, enquanto a outra metade é submetida à seqüência BA?

A resposta é simples: o dentista deve tomar o conjunto de participantes e sortear, metade para testar os métodos numa seqüência, por exemplo AB, outra metade, evidentemente, testará os métodos na seqüência BA.

Além dos delineamentos descritos, existem outros, como os **experimentos hierárquicos** e os **experimentos em parcelas subdivididas “split-plot experiments”**.

3 – ANÁLISE DE VARIÂNCIA - ANOVA

A idéia, na análise de variância, é comparar a **variância devida aos tratamentos** com a **variação devida ao acaso**, ou resíduo. Para fazer uma análise de variância, é preciso proceder a uma série de cálculos. Mas, a aplicação das fórmulas, exige conhecimento da notação, conforme será mostrado posteriormente.

Nas pesquisas científicas, o uso da experimentação está muito difundido, sendo que experiências são projetadas a partir de um fator, nos quais os sujeitos ou unidades experimentais são atribuídos, aleatoriamente, a grupos ou níveis deste único fator, chamados de modelo inteiramente aleatório ou modelo único.

Os fatores propostos podem ser variáveis quantitativas, ou atributos (qualitativas), enquanto que a variável dependente é uma quantitativa e é observada dentro das classes dos fatores, como por exemplo, se quisermos verificar se os índices médios de produção, de três pontos de trabalho, diferem de modo significativo.

O objetivo da análise de variância é analisar as diferenças entre as médias aritméticas dos grupos, a partir de uma análise na variação dos dados, entre os grupos. Na realidade, toma-se a variação total e subdivide-se-a em **variação entre os grupos** e a **variação dentro do grupo**, a qual considera-se como um **erro experimental**, mas se a variação ocorrer **entre os grupos** ela é atribuída ao efeito do tratamento recebido.

Trata-se de uma generalização do teste para a diferença entre duas médias (teste t de *Student*), para o caso de se comparar simultaneamente K médias, desde que K seja maior do que dois, supondo-se que essas médias foram calculadas sobre amostras aleatórias extraídas da população.

No caso de se possuir um número maior de médias a serem comparadas, poder-se-ia pensar em utilizar o teste t , para comparar as médias duas a duas, mas isso, com certeza, traria problemas relacionados ao nível de significância global do teste.

Os modelos de análise de variância podem ser classificados em **modelos fixos** e **modelos aleatórios**. Os modelos fixos são aqueles em que os k tratamentos representam a totalidade dos tratamentos que interessam, isto é, as subpopulações determinadas pelos níveis do fator são aquelas de interesse do pesquisador. Os modelos aleatórios são aqueles em que os k tratamentos representam uma amostra aleatória de tratamentos para que a indução seja conduzida de acordo com uma condição real. Se o experimento for repetido, amostras aleatórias das mesmas subpopulações serão extraídas e analisadas. Em ambos os casos, fixos ou aleatórios, o modelo de análise de variância conduz, em geral, a uma mesma montagem e segue os mesmos procedimentos para a resolução do problema.

A diferença fundamental entre esses dois tipos de fatores é que, no caso de fatores fixos, as conclusões se referem apenas aos níveis do fator que estão presentes no experimento. No caso de fatores aleatórios, as conclusões devem ser estendidas para a população dos níveis.

3.1 - UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A ANOVA é um método poderoso para identificar diferenças entre as médias populacionais, devido a várias causas atuando simultaneamente sobre os elementos da população.

Embora o principal interesse esteja em comparar as médias aritméticas de grupos, ou níveis de um fator, para determinar se existe um efeito de tratamento entre grupos, o procedimento ANOVA deve seu nome ao fato de que, o mesmo, é alcançado por meio da análise das variâncias.

Diga-se que se tem 6 métodos de ensino aplicados a 30 crianças em cada um e gostaríamos de fazer uma comparação entre os métodos. Fazendo-se a comparação 2 a 2, por meio do teste **Z**, ou do teste **t**, o que não é indicado, exigiria a execução de 15 testes, pois por meio de combinação tem-se $C_{6,2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$ testes ou, então, optar pela análise de variância, onde as hipóteses testadas seriam:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_i$$

H_1 : Existe pelo menos uma das médias diferentes.

Na tabela abaixo, apresentam-se os métodos de ensino A, B, C, D, E e F, a média, o desvio padrão, o número de crianças para cada método e o respectivo número de graus de liberdades: g.l. = $\delta = n - 1$.

	A	B	C	D	E	F
\bar{X}	75	72	76	79	82	72
s^2	173,2	168,7	170,1	169,8	172	167,6
n	30	30	30	30	30	30
g. l.	29	29	29	29	29	29

Uma análise de variância permite que vários grupos sejam comparados a um só tempo, utilizando-se variáveis contínuas. O teste é paramétrico (a variável de interesse deve ter distribuição normal) e os grupos devem ser independentes.

Considerando-se uma variável de interesse com média μ e variância σ^2 ter-se-á dois estimadores de σ^2 :

S_E^2 = dispersão entre os grupos, que em inglês é representado por S_B^2 (between).

S_D^2 = dispersão dentro dos grupos, que em inglês é representado por S_W^2 (within).

O teste é aplicado utilizando-se a estatística calculada $F = \frac{S_E^2}{S_D^2}$, que é o teste que compara variâncias.

A variância das médias amostrais é calculada por:

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum \bar{x}_i^2 - \frac{(\sum \bar{x})^2}{k}}{k-1},$$

onde k representa o universo de grupos, logo os graus de liberdade, $\delta = k - 1$.

Neste exemplo, como o N é igual para os 6 grupos, poder-se-á proceder:

Determinando S_E^2 :

$$\sum \bar{x}_i = 75 + 72 + 76 + 79 + 82 + 72 = 456$$

$$(\sum \bar{x}_i)^2 = (456)^2$$

$$\sum \bar{x}_i^2 = 75^2 + 72^2 + 76^2 + 79^2 + 82^2 + 72^2 = 34734$$

$$K = 6 \quad \delta = 6 - 1.$$

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{34.734 - \frac{(456)^2}{6}}{5} = 15,6 \quad \text{logo pela distribuição amostral das médias tem-se que:}$$

$$S_x^2 = \frac{S^2}{N} \quad \square \quad S^2 = S_x^2 \cdot N$$

$$S^2 = 15,6 \times 30 = 468.$$

Mas $S^2 = S_E^2$, onde $S^2 = N \cdot S_x^2$.

$$S_E^2 = N \cdot \left[\frac{\sum \bar{x}_i^2 - \frac{(\sum \bar{x}_i)^2}{k}}{k-1} \right]$$

$S_E^2 = 468$, com $k - 1 = 5$ graus de liberdade.

Determinando S_D^2 :

$$S_D^2 = \frac{(N_1 - 1)S_1^2 + (N_2 - 1)S_2^2 + \dots + (N_k - 1)S_k^2}{(N_1 - 1) + (N_2 - 1) + (N_3 - 1) + \dots + (N_k - 1)}$$

$$S_D^2 = \frac{(30 - 1)(173,2) + (30 - 1)(168,7) + \dots + (30 - 1)(167,6)}{180 - 6}$$

$S_D^2 = 170,2$, com 174 graus de liberdade.

Aplicando-se o teste, tem-se:

$$F_{\text{calc.}} = \frac{S_E^2}{S_D^2} = \frac{468}{170,2} = 2,75 \quad \begin{cases} \delta_1 = 5 \text{ g.l. do numerador} \\ \delta_2 = 174 \text{ g.l. do denominador} \end{cases}$$

Note-se que, nesse teste, S_E^2 sempre fica no numerador e S_D^2 no denominador.

Utilizando-se a estatística tabelada F, a um nível de significância de 5% tem-se que $F_{(5;174);5\%} = 2,21$, como $F_{\text{calc.}} > F_{\text{tab.}}$. A hipótese H_0 é rejeitada, isto é, existe pelo menos uma média diferente das demais.

3.2 - EXPERIMENTOS INTEIRAMENTE AO ACASO (com igual número de repetições)

Em experimentos completamente casualizados, com um fator fixo, tem-se interesse em verificar a influência dos k níveis desse fator, em uma variável dependente Y , em estudo.

A análise de variância baseia-se no fato de que, sendo verdadeira a hipótese H_0 , existem três maneiras pelas quais a variância comum populacional, de todas as populações, pode ser estimada. Desta maneira é possível estimar a **variância total**, **variância entre** as amostras e a **variância residual**.

As hipóteses básicas, à aplicação da ANOVA, são de que:

- as K populações tenham a mesma variância σ^2 - condição de homocedasticidade;
- cada população tem distribuição normal;
- cada amostra é independente e ao acaso, retiradas de sua população de tratamento (colunas);

A idéia da análise de variância (ANOVA), é comparar a variação devida aos tratamentos com a variação devida ao acaso ou resíduo. O seu modelo pode ser resumidamente descrito a seguir:

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij},$$

onde:

- μ representa o efeito devido à média da população a que pertence;
- α_i é o efeito do i-ésimo tratamento;
- ε_{ij} representa o erro residual, com distribuição normal de média zero e variância constante.

A variável dependente, em geral, é pré-determinada pelo pesquisador, isto é, ele sabe qual a variável que ele quer medir.

Portanto, as variáveis, necessariamente presentes em um experimento, são a variável dependente, medida nas unidades experimentais, e o conjunto de fatores (variáveis independentes), que determinam as condições sob as quais os valores da variável dependente são obtidos. Qualquer outra variável, que possa influir nos valores da variável dependente, deve ser mantida constante.

Para se realizar uma análise de variância, é preciso proceder a uma série de cálculos. Mas a aplicação das fórmulas exige conhecimento da notação. Veja a Tabela 01.

Na Tabela 3.1 é apresentado um experimento com k tratamentos, sendo cada tratamento com r repetições. A soma dos resultados, das r repetições de um mesmo tratamento, constitui o total desse tratamento. As médias dos tratamentos são indicadas por $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_k$. O total geral é dado pela soma dos totais de tratamentos.

Tabela 3.1 - Experimento inteiramente ao acaso

	Tratamento					Total
	1	2	3	...	k	
	y_{11}	y_{21}	y_{31}		y_{k1}	
	y_{12}	y_{22}	y_{32}		y_{k2}	
	y_{13}	y_{23}	y_{33}		y_{k3}	
	
	
	y_{1r}	y_{2r}	y_{3r}	...	y_{kr}	
Total	T_1	T_2	T_3	...	T_k	$\Sigma T = \Sigma y$
Nº de repetições	r	r	r	...	r	n = kr
Média	\bar{y}_1	\bar{y}_2	\bar{y}_3	...	\bar{y}_k	

Para se fazer a análise de variância de um experimento ao acaso é preciso calcular as seguintes quantidades:

a) os graus de liberdade:

dos tratamentos : k - 1;
do total : k.r - 1;
do resíduo : k(r-1);

b) O valor de C, conhecido como fator de correção:

$$C = \frac{(\sum y)^2}{N}$$

c) a soma de quadrados total:

$$SQ_{\text{Total}} = \sum y^2 - C;$$

d) a soma de quadrados dos tratamentos:

$$SQ_{\text{Trat.}} = \frac{\sum T^2}{r} - C;$$

e) a soma de quadrados dos resíduo:

$$SQ_{\text{Res.}} = SQ_{\text{Total}} - SQ_{\text{Trat.}};$$

f) o quadrado médio dos tratamento:

$$QM_{\text{Trat}} = \frac{SQ_{\text{Trat}}}{k - 1};$$

g) o quadrado médio de resíduo:

$$QM_{\text{Res}} = \frac{SQ_{\text{Res}}}{k(r - 1)};$$

h) o valor de F:

$$F = \frac{QM_{\text{Trat}}}{QM_{\text{Res}}}.$$

Note-se que os quadrados médios são obtidos dividindo-se as somas de quadrados pelos respectivos graus de liberdade, obtendo-se, assim, as três variâncias, ou termos quadráticos médios.

Uma vez que a variância é calculada dividindo-se a soma das diferenças aos quadrado por seus graus de liberdade apropriados, todos dos termos quadráticos de médias são variâncias.

Todas as quantidades calculadas são apresentadas em uma tabela de análise de variância. Veja a Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Quadro de análise de variância de um experimento inteiramente ao acaso

Causas ou Fontes de variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F_{calc.}
Tratamentos	SQ _{Trat.}	k - 1	QM _{Trat.}	$F_{\text{calc.}} = \frac{QM_{\text{Trat.}}}{QM_{\text{Res.}}}$
Resíduo	SQ _{Res.}	k(r - 1)	QM _{Res.}	
Total	SQ _{Tot.}	k.r - 1		

Para se testar as hipóteses é utilizada a estatística F , de Snedecor, com $(k-1)$ graus de liberdade no numerador e $k.(r-1)$ graus de liberdade no denominador. Se $F_c > F_{\alpha, \delta_1, \delta_2}$, rejeita-se H_0 e conclui-se que existe, pelo menos, uma média que difere de outra.

Se $F_{\text{calc}} > F_{\text{tab}}$, rejeitar H_0 .

Nesse caso, diz-se que existem diferenças estatisticamente significativas entre as médias.

Se $F_{\text{calc}} < F_{\text{tab}}$, não rejeitar H_0 .

Quando isso ocorre, diz-se que não existem evidências estatísticas de que as médias sejam diferentes.

Um procedimento de teste equivalente usa a probabilidade de significância (p-valor), a qual é calculada pela maioria dos programas estatísticos.

O p-valor representa a probabilidade de ser obtida uma observação da distribuição F , com $k-1$ e $k.(r-1)$ graus de liberdade maior ou igual ao valor observado pela F_{calc} . Note-se que se o p-valor for menor que α , rejeita-se H_0 .

Se $p\text{-valor} < \alpha$, rejeita-se H_0 .

Em outras palavras, o p-valor é a probabilidade, sob H_0 , da ocorrência do valor particular observado para a estatística de teste, ou de valores mais extremos. A probabilidade de significância de um teste mede a força da evidência contra H_0 , em uma escala numérica. Um p-valor pequeno indica uma forte justificativa (evidência) para a rejeição de H_0 .

Para se verificar quais médias diferem entre si, é necessário utilizar-se um teste de comparação de médias, que será estudado no capítulo seguinte.

Se a hipótese nula fosse verdadeira, esperar-se-ia que a estatística $F_{\text{calc.}}$ fosse aproximadamente igual a 1, uma vez que ambos os termos quadráticos médios do numerador, e do denominador, estão estimando a real variância σ^2 inerente aos dados. Por outro lado, se H_0 é falsa (e existem diferenças reais nas médias), esperar-se-ia que a estatística $F_{\text{calc.}}$ fosse substancialmente *maior* que 1, uma vez que o numerador, estaria calculando o efeito de tratamento, ou as diferenças entre os grupos, além da variabilidade inerente aos dados, enquanto que o denominador estaria medindo somente a variabilidade inerente.

O procedimento ANOVA gera um teste F, no qual a hipótese nula pode ser rejeitada, em um nível α de significância selecionado, somente se a estatística F calculada for grande o suficiente para exceder o valor crítico da cauda superior da distribuição F.

Exemplo 3.1

Suponhamos que um pesquisador conduziu um experimento inteiramente ao acaso em um conjunto de dados que se pressupõe que sejam normalmente distribuídos e que possua homocedasticidade. O interesse do pesquisador é avaliar se existe diferença significativa entre os tratamentos T_1 , T_2 e T_3 . Como se ajudaria esse pesquisador por meio da ANOVA, utilizando-se um nível de significância de 5%?

	T_1	T_2	T_3	
	3	11	16	
	5	10	21	
	4	12	17	
Soma	12	33	54	99
Média	3	11	18	11

$$C = \frac{(\sum y)^2}{N}$$

$$= \frac{(99)^2}{9} = \frac{9801}{9} = 1089$$

$$SQ_{Tot.} = SQ_{Trat.} + SQ_{Res.}$$

$$SQ_{Tot.} = \sum y^2 - C$$

$$SQ_{Tot.} = (3^2 + 5^2 + 4^2 + 11^2 + 10^2 + 12^2 + 16^2 + 21^2 + 17^2) - 1089$$

$$= 1401 - 1089$$

$$= 312$$

$$SQ_{Trat.} = \frac{\sum Ti^2}{r} - C$$

$$SQ_{Trat.} = \left(\frac{12^2}{3} + \frac{33^2}{3} + \frac{54^2}{3} \right) - 1089$$

$$= (48 + 363 + 972) - 1089$$

$$= 1383 - 1089 = 294$$

$$SQ_{Res.} = SQ_{tot} - SQ_{trat}$$

$$= 312 - 294$$

$$= 18$$

$$H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C$$

H_1 : existe, pelo menos, uma média diferente

ANOVA

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Entre as amostras (Tratamentos)	$SQ_{Trat.}$	$k - 1$	$\frac{SQ_{Trat.}}{k - 1}$	$\frac{QM_T}{QM_R}$
Dentro da amostra (Resíduo)	$SQ_{Resi.}$	$N - K$	$\frac{SQ_{Res.}}{N - K}$	
Total	$SQ_{Tot.}$	$N - 1$	---	---

ANOVA

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Entre as amostras (Tratamentos)	294	3 - 1 = 2	$\frac{294}{2} = 147$	$\frac{147}{3} = 49$
Dentro das amostras (Resíduo)	18	9 - 3 = 6	$\frac{18}{6} = 3$	
Total	312	9 - 1 = 8	---	---

$$\alpha = 5\%$$

$$F_{(k-1; N-K)} = F_{5\%}(2,6) = 5,62$$

Antes de se discutir a interpretação do valor de $F_{\text{calc.}}$, mostrar-se-á como se obtém o correspondente valor crítico (tabelado) de F . Valores de $F_{\text{tab.}}$ estão associados ao número de graus de liberdade do **numerador** e ao número de graus de liberdade do **denominador**. Na análise de variância, de um experimento inteiramente ao acaso, o valor de $F_{\text{calc.}}$ está associado ao número de graus de liberdade de **tratamentos** (numerador) e ao número de graus de liberdade do **resíduo** (denominador). O valor crítico de F , ao nível de significância de 5%, associado a 2 graus de liberdade no numerador e 6 graus no denominador, é 5,62.

Lembre-se que o pesquisador queria comparar três tratamentos e os dados deram origem à análise de variância apresentada na tabela anterior. Como se interpreta o valor $F_{\text{calc.}} = 49$, obtido na análise de variância?

Comparando-se o $F_{\text{tab}} = 5,62$ e o $F_{\text{calc.}} = 49$, e sendo $F_{\text{calc.}} > F_{\text{tab.}}$, rejeita-se ao nível de 5%, a hipótese H_0 . Isto é, existe, pelo menos, uma das médias que é diferente.

Exemplo 3.2 (Adaptado Guerra & Donaire, 1991)

Um fornecedor alimenta a linha de produção de uma determinada indústria com peças em que a sua espessura é medida em milímetros e produzidas pelas máquinas M_A , M_B e M_C . Verifique se existe diferença significativa na espessura média desses itens ao nível de 5%.

	M_A	M_B	M_C	
n = 5	3,2	4,9	3,0	
	4,1	4,5	2,9	
	3,5	4,5	3,7	
	3,0	4,0	3,5	
	3,1	4,2	4,2	
Soma	16,9	22,1	17,3	56,3
Média	3,38	4,42	3,46	3,75

$$C = \frac{(\sum y)^2}{N} = \frac{56,3^2}{15} = \frac{3.169,69}{15} = 211,31$$

$$\begin{aligned} SQ_{Tot} &= \sum y^2 - C \\ &= (3,2^2 + 4,1^2 + 3,5^2 + 3,0^2 + 3,1^2 + 4,9^2 + 4,5^2 + 4,5^2 + 4,0^2 + \dots) - 211,31 \\ &= 217,05 - 211,31 = 5,74 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SQ_{Trat} &= \frac{\sum T^2}{r} - C \\ &= \left(\frac{16,9^2}{5} + \frac{22,1^2}{5} + \frac{17,3^2}{5} \right) - 211,31 \\ &= \left(\frac{285,61}{5} + \frac{488,41}{5} + \frac{299,2}{5} \right) - 211,31 \\ &= (57,122 + 97,682 + 59,858) - 211,31 \\ &= 214,662 - 211,31 \\ &= 3,352 \end{aligned}$$

$$SQ_{Res.} = SQ_{Tot} - SQ_{Trat} = 5,74 - 3,352 = 2,388$$

ANOVA

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F_{calc.}
Tratamentos	SQ _{Trat.}	k - 1	$\frac{SQ_{Trat}}{k - 1}$	$\frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}}$
Resíduo	SQ _{Res.}	N - K	$\frac{SQ_{Res}}{N - K}$	
Total	SQ _{Tot.}	N - 1	---	---

ANOVA

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamentos	3,352	3 - 1 = 2	$\frac{3,352}{2} = 1,676$	$\frac{1,676}{0,199} = 8,422$
Resíduo	2,388	15 - 3 = 12	$\frac{2,388}{12} = 0,199$	
Total	5,74	15 - 1 = 14	---	---

$$\alpha = 5\%$$

$$F_{\alpha; (k-1, N-k)} = F_{5\% (2, 12)} = 3,89$$

$$H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C$$

H₁: existe pelo menos uma média diferente

Como $F_{\text{calc}} > F_{\text{tab}}$, rejeita-se H₀, isto é, existe pelo menos uma das médias que é diferente do nível de 5%.

Exemplo 3.3 (Adaptado Christmann, 1978 & Martins & Fonseca, 1979)

A hiperfertil desenvolveu 3 tipos de fertilizantes específicos para a cultura do milho. Para testá-los, aplicou-os, às mesmas áreas, em pequenos sítios do interior paulista, obtendo-se a seguinte produção:

Região	Produção em sacas de 60kg Fertilizantes			Total
	1	2	3	
Bragança	30	32	26	
Vargem	35	31	29	
Itu	25	42	26	
Total	90	105	81	276
Médias	30	35	27	30,66

Com esses dados, pode-se dizer que há significativas diferenças entre os fertilizantes utilizados? Teste essa hipótese ao nível de 5%.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

H₁: existe pelo menos uma das médias que é diferente.

$$c = \frac{(\sum y)^2}{N} = \frac{276^2}{9} = 8486$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{\text{Tot.}} &= \sum y^2 - C \\
 &= (30^2 + 35^2 + 25^2 + 32^2 + 31^2 + 42^2 + 26^2 + 29^2 + 26^2) - 8464 \\
 &= 8692 - 8464 = 228
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{\text{Trat.}} &= \frac{\sum T^2}{r} - C \\
 &= \left(\frac{90^2}{3} + \frac{105^2}{3} + \frac{81^2}{3} \right) - 8464 \\
 &= (2700 + 3675 + 2187) - 8464 \\
 &= 8562 - 8464 = 98
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{\text{Res}} &= SQ_{\text{Totais}} - SQ_{\text{Trat}} \\
 &= 228 - 98 = 130
 \end{aligned}$$

ANOVA

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamento	$SQ_{\text{Trat.}}$	$k - 1$	$\frac{SQ_{\text{Trat.}}}{k - 1}$	$\frac{QM_{\text{Trat.}}}{QM_{\text{Res}}}$
Resíduo	$SQ_{\text{Res.}}$	$N - K$	$\frac{SQ_{\text{Res.}}}{N - K}$	
Total	$SQ_{\text{Tot.}}$	$N - 1$	---	---

ANOVA

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamento	98	$(3 - 1) = 2$	$\frac{98}{2} = 49$	$\frac{49}{21,66} = 2,26$
Resíduo	130	$(9 - 3) = 6$	$\frac{130}{6} = 21,66$	
Total	228	$(9 - 1) = 8$	---	---

$$F_{5\%; (2,6)} = 5,14$$

Conclui-se, ao nível de 5% de significância, que as médias são iguais. Isto é, aceita-se a hipótese H_0 , observando-se que $F_{\text{calc}} < F_{\text{tab}}$.

Exercício 3.4

A tabela a seguir apresenta os dados de produção de milho, em toneladas por hectare, de três variedades. Faça a análise de variância, para verificar se a produção média, das variedades de milho, é igual ao nível de 5%.

Variedades		
A	B	C
4,00	4,00	5,52
4,48	4,72	4,72
4,16	5,28	5,44
4,40	4,72	5,76

Exercício 3.5

Três grupos de ratos foram treinados para realizarem exercício físico anaeróbio através de uma prancha inclinada com um trilho, sobre o qual corria um carrinho, com pesos diferentes, que o animal empurrava. Após vários meses de treinamento, um dos grupos foi submetido à exaustão de motores a álcool e a gasolina, pelo mesmo tempo, e um terceiro grupo foi mantido como controle, sem as atmosferas poluídas. A tabela abaixo mostra o resultado do desempenho físico dos três grupos.

Rato	Controle	Rato	Álcool	Rato	Gasolina
1	2,4	1 _A	2,3	1 _G	2,5
2	3,1	2 _A	2,5	2 _G	3,1
3	1,9	3 _A	1,8	3 _G	1,9
4	3,0	4 _A	2,4	4 _G	3,0
5	3,0	5 _A	2,6	5 _G	3,0
6	2,2	6 _A	2,9	6 _G	2,2
7	2,2	7 _A	2,0	7 _G	2,2
8	2,3	8 _A	2,7	8 _G	2,2
9	2,5	9 _A	2,8	9 _G	2,5
10	2,5	10 _A	2,2	10 _G	2,5
11	1,9	11 _A	2,1	11 _G	2,0
12	2,8	12 _A	2,5	12 _G	2,9

Sabendo-se que esta variável (desempenho físico) distribui-se normalmente, determine se há diferença significativa entre os grupos. Utilizar $\alpha=5\%$.

3.3 - EXPERIMENTOS INTEIRAMENTE AO ACASO (com números diferentes de repetições)

A análise estatística de um experimento inteiramente ao acaso, com número diferente de repetições, não apresenta maior dificuldade. Todos os cálculos são feitos da maneira já apresentada antes, com exceção da soma de quadrados de tratamentos. A soma de quadrados de tratamentos é dada pela fórmula:

$$SQ_{Tr} = \frac{T_1^2}{r_1} + \frac{T_2^2}{r_2} + \dots + \frac{T_k^2}{r_k} - C$$

Exemplo 3.6

Testes psicológicos foram aplicados para diferentes faixas etárias com o objetivo de determinar o grau de satisfação profissional de 35 pacientes. Os resultados são os seguintes:

18-20	21-24	25-34	35-44	45-54	55-70
8	20	20	18	13	12
11	12	18	20	13	16
9	21	21	21	18	13
13	12	29	17	9	13
10		23	20	14	
		15	16	8	
		27	22		
		16			
		20			

Sabendo-se que a distribuição desta variável é normal, determine se houve diferença significativa entre as diversas faixas etárias, usando o nível de significância de 1%.

$$C = \frac{(\sum y)^2}{N} = \frac{(568)^2}{35} = 9127,829$$

$$SQ_{Tot} = \sum y^2 - C$$

$$= (8^2 + 11^2 + 9^2 + 13^2 + 10^2 + 20^2 + 12^2 + \dots) - 9217,829$$

$$= 10144 - 9217,829 = 926,171$$

$$SQ_{Trat} = \sum \frac{T_i^2}{r} - C$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{51^2}{5} + \frac{65^2}{4} + \frac{189^2}{9} + \frac{134^2}{7} + \frac{75^2}{6} + \frac{54^2}{4} \right) - 9217,829 \\
&= \left(\frac{2601}{5} + \frac{4225}{4} + \frac{35721}{9} + \frac{17956}{7} + \frac{5625}{6} + \frac{2916}{4} \right) - 9217,829 \\
&= (520,2 + 1056,25 + 3969 + 2565,14 + 937,5 + 729) - 9217,829 \\
&= 9777,09 - 9217,829 \\
&= 559,261 \\
SQ_{Res} &= SQ_{Tot.} - SQ_{Trat.} \\
&= 926,171 - 559,261 \\
&= 366,91
\end{aligned}$$

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamento	559,26	6 - 1 = 5	111,85	$\frac{111,85}{12,65} = 8,84$
Resíduo	366,91	35 - 6 = 29	12,65	
Total	926,171	35 - 1 = 34	---	---

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6$$

H₁: Existe pelo menos uma média diferente.

$$\alpha = 1\%$$

$$F_{(5,29), 1\%} = 3,73$$

Como $F_{calc} > F_{tab}$, rejeita-se a hipótese H_0 ao nível de 1%. Isto é, há diferença significativa em relação a satisfação profissional dos pacientes, segundo o teste psicológico aplicado.

Exemplo 3.7 (Adaptado Guerra & Donaire, 1991)

Admitindo-se que as notas em Estatística, para cada turma, distribuem-se normalmente com mesma variância, quer-se saber se as médias obtidas nas provas de aproveitamento em cada uma das turmas são iguais, com $\alpha = 5\%$. Para tal, sorteou-se, ao acaso, alunos em cada uma das turmas e verificou-se as suas notas, obtendo-se os seguintes resultados:

	ADM. Diurno	ADM. Noturno	ECO. Noturno	ECO. Diurno
	2,5	1,0	9,5	3,5
	6,5	0,5	2,0	5,0
	3,5	0,5	1,0	2,0
	4,0	8,0	5,0	7,0
	5,5	3,0	2,0	5,0
	5,5	0,5	4,5	4,0
	4,5	3,0	9,0	4,5
	4,0	7,0	5,5	2,0
	10,0	6,5	3,0	8,5
	5,5	5,5	4,5	4,0
	2,2	0,5	7,0	1,5
	4,0	6,5	3,5	2,5
	3,5	8,5	9,0	9,5
			8,0	3,0
			1,0	8,0
			5,5	6,5
			8,5	1,5
n	13	13	17	17
Σx	61,5	51	88,5	78
\bar{X}	4,73	3,92	5,20	4,58
Σx^2	338,25	320	594,75	460

$$C = \frac{(\sum y)^2}{N} = \frac{279^2}{60} = \frac{77841}{60} = 1297,35$$

$$SQ_{Tot} = \Sigma y^2 - C = (2,5^2 + 6,5^2 + 3,5^2 + \dots + 1,5^2) - 1297,35$$

$$= 1713 - 1297,35 = 415,65$$

$$SQ_{\text{Trat}} = \frac{\sum Ti^2}{r} - C$$

$$= \frac{61,5^2}{13} + \frac{51^2}{13} + \frac{88,5^2}{17} + \frac{78^2}{17} - 1297,35$$

$$= 290,94 + 200,07 + 460,72 + 357,88 - 1297,35$$

$$= 1309,61 - 1297,35$$

$$= 12,26$$

$$SQ_{\text{Res}} = SQ_{\text{Tot.}} - SQ_{\text{Trat.}}$$

$$= 415,65 - 12,26$$

$$= 403,39$$

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamento	12,26	4 - 1 = 3	4,086	$\frac{4,086}{7,203} = 0,5672$
Resíduo	403,39	60 - 4 = 56	7,203	
Total	415,65	60 - 1 = 59	---	---

H₀: As médias são iguais.

H₁: Existe pelo menos uma média diferente.

$$F_{(3,56); 5\%} = 2,76$$

Como $F_{\text{calc}} < F_{\text{tab}}$, aceita-se a hipótese H₀. Isto é, as médias não são diferentes estatisticamente.

4 – COMPARAÇÃO DE MÉDIAS

O objetivo principal, da ANOVA, é apontar se um grupo é, estatisticamente, diferente do outro, ou não. Logo, se a hipótese nula é rejeitada, a um determinado nível de significância, sabe-se, então, que existe, pelo menos, uma das médias de um tratamento que difere de outra.

4.1 - AMOSTRAS DE MESMO TAMANHO

Para se determinar qual ou quais tratamentos não são estatisticamente iguais, utiliza-se uma diferença mínima significativa (**d.m.s.**), que é utilizada para comparar as médias dos tratamentos.

Nada impede que a hipótese nula (H_0) seja aceita, isto é, que as médias dos tratamentos sejam consideradas iguais e que uma investigação seja conduzida, neste caso, o método de comparação das médias é dito **não-protegido**. Caso H_0 seja rejeitada e uma investigação seja conduzida, então o método é dito **protegido**.

Os testes utilizados, para se encontrar a d.m.s., são: teste “t”, de Student; teste de Tukey; teste de Dunnett; teste de Duncan e Teste de Scheffee.

a) Teste t de Student

Encontra-se:

$$dms = t_{\delta, \alpha} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot QMR}{r}}$$

onde:

$t_{\delta;\alpha}$ é valor de estatística t tabelada;

δ são os graus de liberdade do resíduo;

α é nível de significância;

QMR é o quadrado médio dos resíduos;

r é o número de repetições de cada tratamento.

Sempre que o valor absoluto da diferença entre duas médias é igual ou maior do que o valor da **d.m.s.**, diz-se que as médias são estatisticamente diferentes, ou seja, se $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq \text{dms}$, para $i \neq j$.

Exemplo 4.1

Considere-se o Exemplo 3.2, onde se verificou por meio da ANOVA, que existe, pelo menos um dos tratamentos T_1 , T_2 e T_3 que apresentam uma média estatisticamente diferente, ao nível de 5%. Logo, pergunta-se qual ou quais tratamentos são diferentes.

$$\begin{aligned} \text{dms} &= t_{\delta;\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \text{QMR}}{r}} \\ &= t_{6;5\%} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3}} \\ &= 2,447 \times 1,41 = 3,450 \end{aligned}$$

Reproduzindo aqui os tratamentos e as médias temos:

Tratamentos	T_1	T_2	T_3
Médias	4	11	18

As possíveis diferenças são:

$$|T_1 - T_2| = |4 - 11| = |-7| = 7$$

$$|T_1 - T_3| = |4 - 18| = |-14| = 14$$

$$|T_2 - T_3| = |11 - 18| = |-7| = 7$$

Conclui-se que o tratamento T_1 difere significativamente de T_2 e T_3 , assim como T_2 difere de T_3 , pois as diferenças, em módulo, foram maiores que o d.m.s. .

b) Teste de Tukey

Encontra-se:

$$dms = q_{\alpha; (\delta, k)} \sqrt{\frac{QMR}{r}}$$

onde:

“q” é o valor tabelado, levando-se em consideração os graus de liberdade do resíduo (δ), o número de tratamentos (k) e o nível de significância (α);
QMR é o quadrado médio dos resíduos;
 r é o número de repetições de cada tratamento.

Os valores tabelados, para a estatística q apresentam-se no Anexo A.

Exemplo 4.2

Considere-se o Exemplo 3.2, do item anterior, onde a espessura de produção, em milímetros, das máquinas M_A , M_B e M_C são testados ao nível de 5%.

$$\begin{aligned} dms &= q_{5\%; (\delta, k)} \cdot \sqrt{\frac{QMR}{r}} \\ \text{onde: } \delta &= 12 \text{ e } k = 3 \\ &= q_{5\%; (12,3)} \cdot \sqrt{\frac{0,199}{5}} \\ &= 3,77 \times 0,1994 = 0,7517 \end{aligned}$$

Relembrando os tratamentos, e suas médias, temos:

Tratamentos	M_A	M_B	M_C
Médias	3,38	4,42	3,46

$$\begin{aligned} |M_A - M_B| &= |3,38 - 4,42| = |-1,04| = 1,04^* \\ |M_A - M_C| &= |3,38 - 3,46| = |-0,08| = 0,08 \\ |M_B - M_C| &= |4,42 - 3,46| = |0,96| = 0,96^* \end{aligned}$$

Logo, observa-se que existe diferença significativa entre a produção das máquinas M_A e M_B e entre M_B e M_C , cujas diferenças de médias, em módulo, são maiores que a $dms = 0,7517$. As máquinas M_A e M_C

estão produzindo, estatisticamente, nos mesmos níveis de espessura.

c) Teste de Dunnett

Este teste deve ser aplicado toda vez que se pretenda comparar as médias dos tratamentos apenas com a média controle.

Encontra-se:

$$dms = d_{\alpha;(\delta, T)} \sqrt{\frac{2QMR}{r}}$$

onde:

d é o valor tabelado ao nível de significância estabelecido (α), grau de liberdade do resíduo (δ) e o número de grupos tratados (T);

QMR é o quadrado médio dos resíduos;

r é o número de repetições de cada tratamento.

Os valores da estatística d encontram-se no Anexo I.

Exemplo 4.3

Suponhamos que, no Exemplo 3.2, anterior, a máquina M_A seja considerada como controle e usaremos o teste de Dunnett.

$$\begin{aligned} dms &= d_{\alpha\%(\delta, T)} \cdot \sqrt{\frac{2QMR}{r}} \\ &= d_{5\%(12,2)} \cdot \sqrt{\frac{2.0,199}{5}} \\ &= 2,50 \times 0,282 = 0,705 \end{aligned}$$

Relembrando, os tratamentos e suas médias:

Tratamentos	Controle	M_B	M_C
Médias	3,38	4,42	3,46

$$|C - M_B| = |3,38 - 4,42| = |-1,04| = 1,04 > dms$$

$$|C - M_C| = |3,38 - 3,46| = |-0,08| = 0,08$$

$$|M_B - M_C| = |4,42 - 3,46| = |0,96| = 0,96 > dms$$

Nesse caso, a máquina M_B apresenta uma diferença significativa em relação ao controle, enquanto que a M_C não possui.

d) Teste de Duncan

O teste de Duncan é mais trabalhoso que os anteriores, porque exige o cálculo de diversas diferenças mínimas significantes. Por esse motivo, ele não será abordado.

4.2 - AMOSTRAS DE TAMANHOS DIFERENTES

O método, para o cálculo da diferença mínima significativa (**dms**), é semelhante ao exposto anteriormente, apenas com o diferencial de que o número de repetições, em cada tratamento, deve ser levado em consideração e que a **dms** deve ser calculada a cada diferença que se queira investigar. Logo, apresenta-se uma tabela com o resumo das formulações.

Tabela 4.1 – Cálculo para o dms para amostras de tamanhos diferentes

Teste	Fórmulas
Teste t	$dms = t_{\delta, \alpha} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}\right) QMR}$
Teste de Tukey	$dms = q_{\alpha, (\delta, k)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}\right) \frac{QMR}{2}}$
Teste de Dunnett	$dms = d_{\alpha, (\delta, T)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{r_t} + \frac{1}{r_c}\right) \frac{QMR}{2}}$

Onde r_i e r_j são o número de repetições de cada tratamento. Aqui também o teste de Dunnett é usado para comparar o

grupo tratado com o grupo controle, e r_i e r_c representam o número de repetições de cada grupo, respectivamente.

Exemplo 4.4

Para a ilustração do procedimento, utiliza-se o experimento que conta o número de ovos por poedeira, 35 dias após o início do experimento, conforme a tabela abaixo:

Número de ovos por poedeira, 35 dias após o início do experimento.

Tratamentos			
A	B	C	D
25	24	25	20
21	31	18	17
29	32	19	23
		22	16

ANOVA

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamentos	200	3	66,67	5,13
Resíduo	130	10	13,00	
Total	330	13	---	---

Ao nível de 5%, os tratamentos não são iguais. Mas diga-se que se está interessado em calcular a **dms** entre as médias, usando-se o teste de Tukey entre A e C. Para exemplificar:

$$\begin{aligned}
 dms &= q_{\alpha, (6, k)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}\right) \frac{QMR}{2}} \\
 &= q_{5\% (10, 4)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_C}\right) \frac{13}{2}} \\
 &= 4,33 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) 6,5} \\
 &= 8,43
 \end{aligned}$$

Resumidamente, ter-se-á:

Comparação	Nº de repetições	dms - Tukey	Valor absoluto da diferença
A – B	3 ; 3	9,01	25 – 29 = 04
A – C	3 ; 4	8,43	25 – 21 = 04
A – D	3 ; 4	8,43	25 – 19 = 06
B – C	3 ; 4	8,43	29 – 21 = 08
B – D	3 ; 4	8,43	29 – 19 = 10*
C – D	4 ; 4	7,81	21 – 19 = 02

Pode-se concluir que a média do B é significativamente maior que a do D.

OBSERVAÇÕES

Recomenda-se, quando se pretende comparar grupos tratados com o grupo controle, designar mais unidades ao grupo controle, de modo que a seguinte expressão seja satisfeita:

$$\frac{r_c}{r_t} = \sqrt{k-1} , \text{ logo } r_c = r_t \cdot \sqrt{k-1}$$

onde:

r_c é o número de repetições do grupo controle;

r_t é o número de repetições do grupo tratado;

k é o número de tratamentos.

Embora o número de repetições não traga grande dificuldade para a análise de experimentos, convém lembrar que o número igual de repetições tem alguma vantagem: a análise de variância é mais simples e os testes de comparação de médias são exatos.

4.3 - ALGUMAS PROPRIEDADES DOS TESTES

4.3.1 - Tukey

É um teste mais rigoroso. Tem-se sempre a probabilidade de 95% de não apontar, como significativa, uma diferença realmente nula entre as médias.

O teste de Tukey é usado na análise de variância, para comparar todo e qualquer contraste entre duas médias de tratamentos. É o teste de comparação de médias mais usado em experimentação, por ser bastante rigoroso e de fácil aplicação. É mais exato quando os números de repetições, das médias dos tratamentos, forem iguais.

Quando no Teste Tukey não der diferença significativa, e o teste F for significativo, o mesmo poderá ser substituído pelo Teste de Duncan, por ser menos rigoroso, ou trocar o nível de significância para 10%, ou simplesmente aceitar a análise encontrada.

4.3.2 - Duncan

É menos rigoroso que o teste Tukey, fornece diferenças significativas com mais facilidade.

O teste de Duncan é usado na análise de variância, para comparar todo e qualquer contraste entre duas médias de tratamentos. É menos rigoroso que o Teste de Tukey, pois detecta diferença significativa entre duas médias quando o teste de Tukey não o faz. É um teste bastante usado em trabalhos de laboratórios, pode ser usado tanto para tratamentos com o mesmo número de repetições, quanto tratamentos com parcelas perdidas.

- Para duas médias ele exige uma probabilidade de 95% (0,95) de que não se aponte como significativa a diferença realmente nula (logo aponta existir diferença);
- Para três médias, a probabilidade será $(0,95)^2 = 0,9025$ e, com quatro médias, a probabilidade baixa para $(0,95)^3 = 0,8574$ e, assim, a probabilidade de aceitar a diferença nula vai decrescendo.

4.3.3 – Scheffé

É mais rigoroso que os demais testes. Desaconselhável para comparação de duas médias, mas é recomendável para contrastes mais complicados.

O teste de Scheffé é usado na análise de variância, numa forma mais abrangente que o Teste de Duncan e de Tukey, pois permite julgar qualquer contraste. Pode ser usado tanto para duas médias (contraste simples) como para mais de duas médias (contraste múltiplo), na qual ele é o mais indicado, por ser mais rigoroso que o Teste de Tukey.

4.3.4 - Análise dos três testes

Quando o teste F, da análise de variância, não for significativo, os três testes acima não terão efeito de aplicação (só se o teste F estiver próximo da significância). Para melhor visualizar a análise comparativa das médias, as médias dos tratamentos são colocadas em ordem crescente e, para cada conjunto de médias, que não difira estatisticamente é atribuída uma mesma letra, ou seja, para letras iguais médias estatisticamente iguais, para letras diferentes médias estatisticamente diferentes. Para a análise, usa-se um nível de significância de 5%.

5 – EXPERIMENTOS EM BLOCOS AO ACASO

A análise de variância de classificação dupla serve para testar, simultaneamente, diferenças entre médias, levando em consideração dois tratamentos ou fatores. Dessa forma, a observação admite a influência dos seguintes elementos:

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

onde:

μ representa o efeito, devido a média da população que pertence;

α_i é o efeito do i -ésimo tratamento;

β_j é o efeito do j -ésimo tratamento;

ε_{ij} representa o erro residual, que se pressupõem ter distribuição normal com média zero e variância constante.

As hipóteses a serem testadas são as seguintes:

H_{01} : Não existe diferença significativa entre as médias dos tratamentos (colunas);

H_{02} : Não existe diferença significativa entre as médias dos blocos (linhas);

Para entender como se faz a análise de variância de um experimento em blocos ao acaso, primeiro observe a Tabela 5.1. Nessa tabela estão indicados os dados de um experimento em blocos ao acaso, com k tratamentos e r blocos. O total de cada tratamento é dado pela soma das r

unidades submetidas a esse tratamento; o total do bloco é dado pela soma das k unidades do bloco.

TABELA 5.1 - Um experimento em blocos ao acaso

Bloco	Tratamento					Total
	1	2	3	...	K	
1	y_{11}	y_{21}	Y_{31}	...	y_{k1}	B_1
2	y_{12}	y_{22}	Y_{32}	...	y_{k2}	B_2
3	y_{13}	y_{23}	Y_{33}	...	y_{k3}	B_3
.
.
.
r	y_{1r}	y_{2r}	Y_{3r}	...	y_{kr}	B_r
Total	T_1	T_2	T_3	...	T_k	$\Sigma T = \Sigma B = \Sigma y$
Número de repetições	r	r	r	...	r	$n = k \cdot r$
Média	\bar{y}_1	\bar{y}_2	\bar{y}_3	...	\bar{y}_k	

Para fazer a análise de variância, de um experimento em blocos ao acaso, é preciso calcular:

a) os graus de liberdade:

do total: $kr - 1$
 dos tratamentos: $k - 1$
 dos blocos: $r - 1$
 dos resíduos: $(kr - 1) - (k - 1) - (r - 1) = (k - 1)(r - 1)$

b) o valor de C , que é dado pelo total geral elevado ao quadrado e dividido pelo número de observações:

$$C = \frac{(\sum y)^2}{kr}$$

c) a soma de quadrados total:

$$SQ_T = \Sigma y^2 - C;$$

d) a soma de quadrados dos tratamentos:

$$SQ_{Tr} = \frac{\Sigma T^2}{r} - C;$$

e) a soma de quadrados de blocos:

$$SQ_{Bl} = \frac{\Sigma B^2}{k} - C;$$

f) a soma de quadrados dos resíduos:

$$SQ_{Res} = SQ_T - SQ_{Tr} - SQ_{Bl}.$$

As somas de quadrados são apresentadas na tabela de análise de variância. Para calcular os quadrados médios, basta dividir cada soma de quadrados pelos respectivos graus de liberdade. O valor de F , para tratamentos, é dado pelo quociente entre o quadrado médio dos tratamentos e o quadrado médio dos resíduos; o valor de F , para os blocos, é dado pelo quociente entre o quadrado médio dos blocos e o quadrado médio dos resíduos.

Tabela 5.2 - Análise de variância de um experimento em blocos ao acaso

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamentos	SQ _{Tr}	K - 1	QM _{Tr}	$F_{Tr} = \frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}}$
Blocos	SQ _{Bl}	r - 1	QM _{Bl}	$F_{Bl} = \frac{QM_{Bloco}}{QM_{Res}}$
Resíduos	SQ _{Res.}	(k - 1) (r - 1)	QM _{Res}	---
Total	SQ _{T.}	Kr - 1	---	---

Exemplo 5.1 (Christmann, 1978)

Vamos considerar a tabela a seguir, que condensa os tempos em minutos, que quatro tipos de barcos, com cascos diferentes, levaram para percorrer determinado circuito, em três dias diferentes: dia calmo, com ondas moderadas e um dia com ondas fortes e muito vento.

	Casco	Blocos			T _i	T _i ²
		Dia 1	Dia 2	Dia 3		
Tratamentos	1	45	46	51	142	20164
	2	42	44	50	136	18496
	3	36	41	48	125	15625
	4	49	47	54	150	22500
	T _j	172	178	203	553	76785
	T _j ²	29584	31684	41209	102477	

$$C = \frac{(\sum y)^2}{N} = \frac{(553)^2}{12} = 25.484,083$$

$$\begin{aligned} SQ_T &= \sum y^2 - C \\ &= (45^2 + 42^2 + 36^2 + 49^2 + \dots + 54^2) - 25.484,083 \\ &= 25.749 - 25.484,083 \\ &= 264,917 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{Tr} &= \frac{\sum T^2}{r} - C \\
 &= \frac{(142^2 + 136^2 + 125^2 + 150^2)}{3} - 25.484,083 \\
 &= \frac{76785}{3} - 25.484,083 \\
 &= 25.595 - 25.484,083 \\
 &= 110,17
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{Bl} &= \frac{\sum B^2}{k} - C \\
 &= \frac{(172^2 + 178^2 + 203^2)}{4} - 25.484,083 \\
 &= \frac{102.477}{4} - 25.484,083 \\
 &= 25.619,25 - 25.484,083 \\
 &= 135,167
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{Res} &= SQ_T - SQ_{Tr} - SQ_{Bl} \\
 &= 264,917 - 110,917 - 135,167 \\
 &= 18,833
 \end{aligned}$$

ANOVA

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamentos	SQ_{Tr}	$k - 1$	QM_{Tr}	$F_{Tr} = \frac{QM_{Tr}}{QM_{Res}}$
Blocos	SQ_{Bl}	$r - 1$	QM_{Bl}	$F_{Bl} = \frac{QM_{Bl}}{QM_{Res}}$
Resíduos	$SQ_{Res.}$	$(k - 1)(r - 1)$	QM_{Res}	---
Total	SQ_T	$Kr - 1$	---	---

ANOVA

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamentos	110,17	4 - 1 = 3	36,97	$\frac{36,97}{3,14} = 11,77$
Blocos	135,67	3 - 1 = 2	67,58	$\frac{67,58}{3,14} = 21,52$
Resíduos	18,833	(4 - 1)(3 - 1) = 6	3,14	---
Total	264,917	4.3 - 1 = 11	---	---

Para os tratamentos

$$F_{\alpha}; (\delta_{Tr}; \delta_{Res}) = F_{1\%}; (3,6) = 9,78$$

Como o valor $F_{calc} = 11,77$ é maior do que o valor tabelado 9,78, rejeita-se a hipótese H_{01} . Isto é, conclui-se que os tratamentos possuem médias significativamente diferentes.

Para os blocos

$$F_{\alpha}; (\delta_{Bl}; \delta_{Res}) = F_{1\%}; (2,6) = 10,90$$

Nesse caso, também rejeita-se a hipótese H_{02} . Isto é, existe diferença significativa entre as médias dos blocos.

Como o valor de F_{calc} dos tratamentos é maior que o valor tabelado, conclui-se pela rejeição da igualdade de médias. Isto é, existe, pelo menos, uma das médias que é diferente das demais. O desenho do casco influenciou a velocidade do barco; em relação aos blocos, também a hipótese de nulidade foi rejeitada, confirmando que foi acertado medir os tempos separadamente para os dias (dividindo a amostra em blocos) e que as ondas e o vento também influenciaram na velocidade.

Exercício 5.1 (Adaptado por Vieira & Hottmann, 1989)

Faça a análise de variância dos dados apresentados na tabela a seguir, utilizando um nível de significância de 1%. Utilizando os dados de um experimento em blocos ao acaso

Bloco	Tratamento		
	A	B	C
I	45	48	60
II	90	69	78
III	79	57	77
IV	82	70	97

Exercício 5.2

São dados os pesos de três ratos aos 30, 34, 38, 42 e 46 dias de idade. Faça a análise de variância e interprete o resultado. Considere que cada animal é um bloco e que as idades são os tratamentos. Utilize um nível de significância de 1%.

Peso, em gramas, de três ratos segundo a idade, em dias

Rato	Idade				
	30	34	38	42	46
1	83	86	103	116	132
2	63	69	79	81	98
3	55	61	79	79	91

6 – EXPERIMENTOS EM BLOCOS AO ACASO (com repetição)

O experimento pode se tornar mais sensível se houver a possibilidade de identificar e isolar as causas que o influenciam. Essas causas (estranhas), quando não identificadas, contribuem para aumentar o valor de S^2_A e mascarar a conclusão final.

Assim, sempre que possível, essas causas de variação devem ser isoladas através de um planejamento, onde as observações de cada amostra são divididas em subamostras e denominadas blocos. Isso equivale a fazer, em lugar de uma classificação simples, uma classificação dupla e cruzada das observações, segundo os tratamentos e segundo os blocos.

A metodologia na aplicação desse modelo é a mesma da anterior e está descrita na Tabela 6.1.

TABELA 6.1 - Experimento em blocos ao acaso com repetições

Bloco	Tratamento				Total
	1	2	...	K	
1	y_{111}	y_{211}		y_{k11}	B_1
	y_{112}	y_{212}		y_{k12}	
	.	.		.	
	.	.		.	
	y_{11m}	y_{21m}		y_{k1m}	
2	y_{121}	y_{221}		y_{k21}	B_2
	y_{122}	y_{222}		y_{k22}	
	.	.		.	
	.	.		.	
	y_{12m}	y_{22m}		y_{k2m}	
.	.		.	.	
.	.		.	.	
r	y_{1r1}	y_{2r1}		y_{kr1}	B_r
	y_{1r2}	y_{2r2}		y_{kr2}	
	.	.		.	
	.	.		.	
	y_{1rm}	y_{2rm}		y_{krm}	
Total	T_1	T_2	...	T_k	$\Sigma T = \Sigma B = \Sigma y$
Número de repetições	rm	rm	...	rm	$n = krm$
Média	\bar{y}_1	\bar{y}_2	...	\bar{y}_k	

Para fazer a análise de variância, de um experimento em blocos ao acaso com repetição, é preciso calcular:

a) os graus de liberdade

$$\begin{array}{ll} \text{do total:} & n - 1 \\ \text{dos tratamentos:} & k - 1 \\ \text{dos blocos:} & r - 1 \\ \text{dos resíduo:} & (n - 1) - (k - 1) - (r - 1) = n - k - r + 1 \end{array}$$

b) o valor de C:

$$C = \frac{(\sum y)^2}{N};$$

c) a soma de quadrados total:

$$SQ_T = \sum y^2 - C;$$

d) a soma de quadrados dos tratamentos:

$$SQ_{Tr} = \frac{\sum T^2}{rm} - C;$$

e) a soma de quadrados dos blocos:

$$SQ_{Bl} = \frac{\sum B^2}{km} - C;$$

f) a soma de quadrados dos resíduos:

$$SQ_{Res} = SQ_T - SQ_{Tr} - SQ_{Bl};$$

g) o quadrado médio dos tratamentos:

$$QM_{Tr} = \frac{SQ_{Trat}}{k - 1};$$

h) o quadrado médio dos blocos:

$$QM_{Bl} = \frac{SQ_{Bloco}}{r - 1};$$

i) o quadrado médio dos resíduos:

$$QM_{Res} = \frac{SQ_{Res}}{n - k - r + 1};$$

j) o valor de F para os tratamentos:

$$F_{Tr} = \frac{QM_{Tr}}{QM_{Res}};$$

k) o valor de F para os blocos:

$$F_{Bl} = \frac{QM_{Bl}}{QM_{Res}}.$$

Para um melhor entendimento, utilizar-se-á o quadro de análise de variância.

Tabela 5.2 - Análise de variância de um experimento em blocos ao acaso

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamentos	$SQ_{Tr.}$	$k - 1$	$\frac{SQ_{Tr.}}{k - 1}$	$\frac{QM_{Tr.}}{QM_{Res.}}$
Blocos	$SQ_{Bl.}$	$r - 1$	$\frac{SQ_{Bl.}}{r - 1}$	$\frac{QM_{Bl.}}{QM_{Res.}}$
Resíduos	$SQ_{Res.}$	$n - k - r + 1$	$\frac{SQ_{Res.}}{n - k - r + 1}$	---
Total		$n - 1$	---	---

A soma total dos quadrados (SQ_T) é dividida em três componentes: tratamento, bloco e resíduo, testando-se simultaneamente dois valores de F , um correspondente aos tratamentos e outro aos blocos. Se este último valor resultar significativo, será indicativo de que se estiver acertado em isolar a causa de variação; em caso contrário, a conclusão seria a mesma se tivesse aplicado o modelo de classificação simples.

Exemplo 6.1 (Adaptado Vieira & Hottmann, 1989)

Utilizando os dados da Tabela a seguir, que se referem às notas dos alunos do teste segundo o tratamento (fonte de informação) e o bloco (faixa de idade), realize uma análise de variância ao nível de 5%.

Bloco	Tratamento				Total
	A	B	C	D	
I	65	56	58	38	648
	69	49	65	30	
	73	54	57	34	
II	72	73	76	71	864
	79	77	69	65	
	80	69	71	62	
Total	438	378	396	300	1512

Para fazer a análise de variância dos dados, apresentados na Tabela 6.1, é preciso calcular:

- a) os graus de liberdade:
- | | |
|------------------|------------------------------|
| do total: | $4 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 23$ |
| dos tratamentos: | $4 - 1 = 3$ |
| dos blocos: | $2 - 1 = 1$ |
| dos resíduos: | $24 - 4 - 2 + 1 = 19$ |

- b) o valor de C:

$$C = \frac{1512^2}{24} = 95256$$

- c) a soma de quadrados total:

$$SQ_{\text{Tot}} = (65^2 + 69^2 + \dots + 62^2) - C = 99638 - 95256 = 4382$$

- d) a soma dos quadrados dos tratamentos:

$$SQ_{\text{Tr}} = \frac{438^2 + 378^2 + 396^2 + 300^2}{6} - C = 96924 - 95256 = 1668$$

- e) a soma de quadrados dos blocos:

$$SQ_{\text{Bl}} = \frac{648^2 + 864^2}{12} - 95256 = 97200 - 95267 = 1944$$

- f) a soma de quadrados dos resíduos:

$$SQ_{\text{Res}} = 4382 - 1668 - 1944 = 770$$

- g) o quadrado médio dos tratamentos:

$$QM_{\text{Tr}} = \frac{1668}{3} = 556$$

- h) o quadrado médio dos blocos:

$$QM_{\text{Bl}} = \frac{1944}{1} = 1944$$

- i) o quadrado médio dos resíduos:

$$QM_{\text{Res}} = \frac{770}{19} = 40,526$$

j) o valor de F para os tratamentos:

$$F_{Tr} = \frac{556}{40,526} = 13,72$$

k) o valor de F para os blocos:

$$F_{Bl} = \frac{1944}{40,526} = 47,97$$

Os valores calculados estão apresentados na Tabela abaixo:

ANOVA

Fontes de Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamentos	1668	3	556	13,72
Blocos	1944	1	1944	47,97
Resíduos	770	19	40,526	---
Total	4382	23	---	---

É fácil verificar que os valores calculados de F , tanto para tratamentos, como para blocos, são maiores do que os valores de F na tabela, ao nível de significância de 5%, com os respectivos graus de liberdade. O professor pode então concluir que a nota média dos alunos, no teste de conhecimento, não é a mesma para todas as fontes de informação e depende da faixa de idade. Mas, a análise de variância apresentada, só estaria correta se fosse razoável pressupor que não existe interação entre os efeitos de tratamento e os efeitos de blocos. Mas o que é interação? É o que se discutirá no próximo capítulo.

7 – EXPERIMENTOS COM INTERAÇÕES

Na maioria dos experimentos, os tratamentos são de efeitos fixos. Mas também são realizados experimentos em que os efeitos dos tratamentos são aleatórios. Para se saber, em um experimento, os efeitos são fixos ou aleatórios, verifique-se se os tratamentos em comparação são apenas parte de uma população. Caso afirmativo, é razoável admitir-se que eles constituem uma amostra aleatória dessa população. Neste caso, os efeitos são aleatórios.

Também existem modelos mistos, isto é, experimentos em que apenas os tratamentos, ou apenas os blocos, são de efeitos aleatórios.

A análise dos experimentos inteiramente ao acaso, e dos experimentos em blocos ao acaso sem repetições, é feita da mesma forma, quer se admita o modelo como de efeitos fixos, ou de efeitos aleatórios. No entanto, a análise dos experimentos em blocos ao acaso com repetições é diferente, conforme a natureza dos efeitos, (fixos ou aleatórios) de tratamentos e blocos.

No Capítulo anterior foi realizada a ANOVA de um experimento em blocos ao acaso com repetições, sem interação, pois, até o momento, pressupôs-se que a interação entre blocos e tratamentos era inexistente.

Imagine-se que se tem um experimento com k tratamentos, r blocos e m repetições de cada tratamento dentro de cada bloco. O número total de parcelas é $n = k r m$. Para fazer a análise de variância, considerando-se que tanto os

tratamentos como os blocos são de efeitos fixos, logo é preciso calcular:

a) os graus de liberdade

do total:	$n - 1$
dos tratamentos:	$k - 1$
dos blocos:	$r - 1$
da interação:	$(k - 1)(r - 1)$
dos resíduos:	$kr(m - 1)$

b) as somas de quadrados do total, dos tratamentos e de blocos, como foi visto anteriormente.

Para calcular a soma de quadrados da interação é preciso obter os totais de tratamentos dentro de cada bloco. Esses totais serão indicados pela letra I . Cada valor de I é a soma de m parcelas. São kr totais desse tipo, como mostra a Tabela 7.1. Cada total de tratamento, indicado pela letra T , pode ser obtido pela soma de r valores de I e, cada total de bloco, indicado pela letra B , pode ser obtido pela soma de k valores de I .

TABELA 7.1 – Experimento em blocos ao acaso com repetições

Bloco	Tratamento				Total
	1	2	...	K	
1	$\left. \begin{matrix} y_{111} \\ y_{112} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{11m} \end{matrix} \right\} I_{11}$	$\left. \begin{matrix} y_{211} \\ y_{212} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{21m} \end{matrix} \right\} I_{21}$...	$\left. \begin{matrix} y_{k11} \\ y_{k12} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{k1m} \end{matrix} \right\} I_{k1}$	B_1
2	$\left. \begin{matrix} y_{121} \\ y_{122} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{12m} \end{matrix} \right\} I_{12}$	$\left. \begin{matrix} y_{221} \\ y_{222} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{22m} \end{matrix} \right\} I_{22}$...	$\left. \begin{matrix} y_{k21} \\ y_{k22} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{k2m} \end{matrix} \right\} I_{k2}$	B_2
·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·
R	$\left. \begin{matrix} y_{1r1} \\ y_{1r2} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{1rm} \end{matrix} \right\} I_{1r}$	$\left. \begin{matrix} y_{2r1} \\ y_{2r2} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{2rm} \end{matrix} \right\} I_{2r}$...	$\left. \begin{matrix} y_{kr1} \\ y_{kr2} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{krm} \end{matrix} \right\} I_{kr}$	B_r
Total	T_1	T_2	...	T_k	$\Sigma T = \Sigma B = \Sigma y$

Para calcular a ANOVA, precisa-se encontrar os seguintes valores:

a) a soma de quadrados da interação tratamento, versus bloco:

$$SQ_{Tr \times B} = \frac{\sum I^2}{M} - C - SQ_{Tr} - SQ_B;$$

b) a soma de quadrados dos resíduos:

$$SQR = SQT - SQTr - SQB - SQTr \times B ;$$

c) o quadrado médio da interação:

$$QM_I = \frac{SQTr \times B}{(k - 1)(r - 1)} ;$$

d) o quadrado médio dos resíduos:

$$QM_{Res} = \frac{SQR}{k r (m - 1)} ;$$

e) o valor de F para os tratamentos:

$$F_{Tr} = \frac{QM_{Tr}}{QMR} ;$$

f) o valor de F para os blocos:

$$F_{Bl} = \frac{QMB}{QMR} ;$$

g) o valor de F para a interação:

$$F_I = \frac{QMI}{QMR} ;$$

Para mostrar como se faz a análise de variância de um experimento em blocos ao acaso com repetições, quando os efeitos são fixos, serão usadas as notas dos alunos no

experimento, para comparar a eficiência das fontes de informação apresentadas no Capítulo anterior.

a) os graus de liberdade:

do total: $4 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 23$
 dos tratamentos: $4 - 1 = 3$
 dos blocos: $2 - 1 = 1$
 da interação: $3 \cdot 1 = 3$
 dos resíduos: $4 \cdot 2 (3 - 1) = 16$

b) as somas de quadrados totais, de tratamentos e de blocos. Esses valores já foram determinados no capítulo anterior, e são:

$$SQT = 4382$$

$$SQTr = 1668$$

$$SQB = 1944$$

c) a soma de quadrados da interação. Para isso, é preciso organizar os totais de tratamentos em cada bloco. Observe a Tabela a seguir:

ANOVA

Bloco	Tratamento				Total
	A	B	C	D	
I	65	56	58	38	648
	69 } 207	49 } 159	65 } 180	3 } 102	
	73 } }	54 } }	57 } }	34 } }	
II	72	73	76	71	864
	79 } 231	77 } 219	69 } 216	65 } 198	
	80 } }	69 } }	71 } }	62 } }	
Total	438	378	396	300	1512

Agora, lembrando que a correção é 95256, calcule:

$$SQI = \frac{207^2 + 231^2 + \dots + 198^2}{3} \quad 95256 \quad 1668 \quad 1944$$

$$= 99372 \quad 95256 \quad 1668 \quad 1944 \quad 504$$

d) a soma de quadrados do resíduo:

$$SQR = 4382 \quad 1668 \quad 1944 \quad 504 \quad 266$$

e) o quadrado médio de tratamentos e o quadrado médio de blocos, já obtidos no Capítulo anterior, que são:

$$QMT_r = 556$$

$$QMB = 1944$$

f) o quadrado médio da interação:

$$QMI = \frac{504}{3} = 168$$

g) o quadrado médio dos resíduos:

$$QMR = \frac{266}{16} = 16,625$$

h) o valor de F para os tratamentos:

$$F_{Tr} = \frac{556}{16,625} = 33,44$$

i) o valor de F para os blocos:

$$F_{Bl} = \frac{1944}{16,625} = 116,93$$

j) o valor de F para a interação:

$$F_i = \frac{168}{16,625} = 10,11$$

Os valores calculados estão organizados na Tabela a seguir:

ANOVA

Fontes de variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}
Tratamentos	1668	3	556	33,44
Blocos	1944	1	1944	116,93
Interação	504	3	168	10,11
Resíduos	266	16	16,625	---
Total	4382	23	---	---

Feita a análise de variância, é preciso verificar se os valores de F são significativos. Recomenda-se interpretar, primeiro, o resultado da interação. Se o valor de F , para a interação, for significativo, o comportamento dos tratamentos dependerá do bloco. Nesse caso, o lógico seria comparar as médias dos tratamentos dentro dos blocos.

7.1- A ANÁLISE DE VARIÂNCIA DE EXPERIMENTOS EM BLOCOS AO ACASO COM REPETIÇÕES E EFEITOS ALEATÓRIOS

Se os efeitos são aleatórios, a análise de variância dos experimentos em blocos ao acaso com repetições têm, em relação à análise, onde os efeitos são fixos, uma única diferença: o cálculo dos valores de F .

Para se obter os valores de F , quando os efeitos de blocos e de tratamentos são aleatórios, calcula-se:

a) Para os tratamentos:

$$F_{Tr} = \frac{QM_{Tr}}{QMI};$$

b) Para os blocos:

$$F_{B1} = \frac{QMB}{QMI} ;$$

c) Para a interação:

$$F_I = \frac{QMI}{QMR} ;$$

É razoável dizer que, uma vez que existe interação dos blocos versus tratamentos, devem-se comparar as médias de tratamentos dentro dos blocos.

8 - VERIFICAÇÃO DA ADEQUAÇÃO DO MODELO DE ANÁLISE DE VARIÂNCIA ANÁLISE DE RESÍDUOS

Conforme foi apresentado anteriormente, o teste na análise de variância assume que as observações são independentes e normalmente distribuídas, com a mesma variância para cada tratamento. A validade, dessas suposições, deve ser verificada por meio da análise de resíduos.

8.1 - GRÁFICO DOS RESÍDUOS CONTRA O TEMPO

A validade da suposição de independência pode ser verificada por meio do gráfico de resíduos contra o tempo (ordem de coleta das observações). Se, neste gráfico, os resíduos (e_i) estiverem situados, aproximadamente, em torno de uma faixa horizontal centrada em $e_i = 0$, então será obtida uma indicação da validade da suposição de independência. Por outro lado, configurações especiais, tais como a presença de seqüências de resíduos positivos e negativos, ou padrões de alternância de sinais, podem indicar que as observações não são independentes.

Um resíduo é definido como:

$$e_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i$$

Isto é, o resíduo é obtido da diferença entre uma observação e a média do tratamento correspondente.

Configurações especiais, no gráfico de resíduos, contra a ordem de obtenção dos dados, indicam que as observações não são independentes.

Note-se que a violação da suposição de independência dos erros e_{ij} pode exercer sérios efeitos sobre a validade das inferências realizadas por meio da análise de variância. Como esse é um problema difícil de ser corrigido, é importante tentar impedir a sua ocorrência. Geralmente, o emprego de uma aleatorização adequada para a coleta dos dados faz com que a condição de independência não seja violada. Conforme a Figura 8.1:

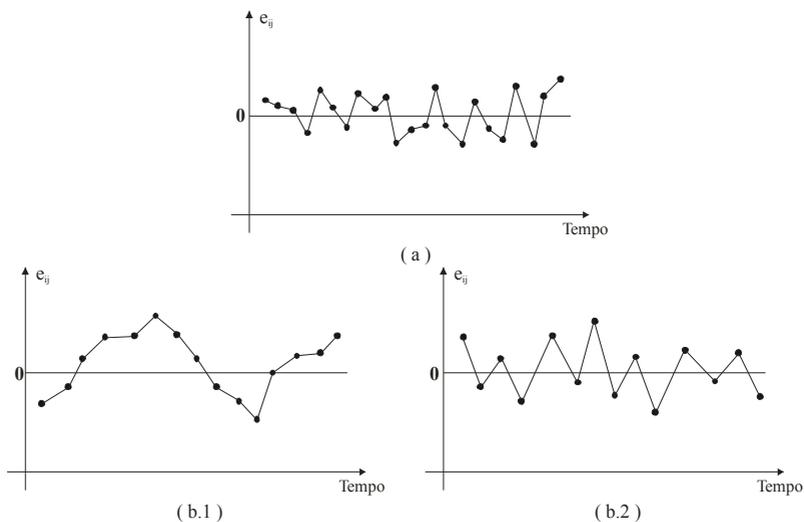


Figura 8.1 - Exemplos de gráficos de resíduos contra o tempo, Indicando: (a) validade da suposição de independência. (b) violação da suposição de independência.

8.2 - GRÁFICO DE RESÍDUOS CONTRA AS MÉDIAS DOS TRATAMENTOS

Para se avaliar a validade da suposição de igualdade de variâncias em todos os níveis do fator, deve-se traçar o gráfico dos resíduos contra as médias dos tratamentos \bar{X}_i e analisar a dispersão dos resíduos. Se a suposição é válida, essa dispersão não deve depender do valor de \bar{X}_i , ver figura 8.2:

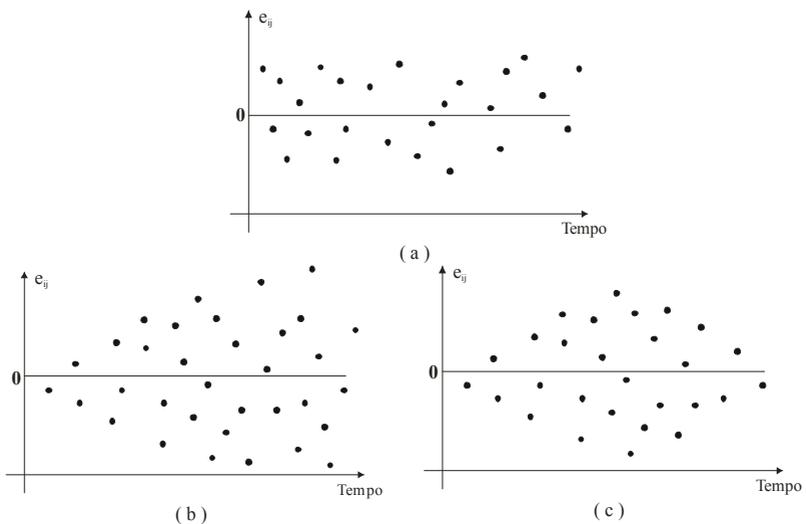


Figura 8.2 - Padrões para os gráficos de resíduos contra as médias dos tratamentos: (a) satisfatório, (b) funil, (c) laço duplo

Se a faixa de dispersão no gráfico de resíduos contra as médias dos tratamentos depender do valor de \bar{X}_i , terá sido obtida uma indicação de que a suposição de igualdade de variâncias não é válida.

A abordagem mais usual, para lidar com situações onde a variação não é constante, consiste em utilizar-se

transformações para estabilizar a variância e, então, aplicar as técnicas já abordadas, aos dados transformados. É importante notar que, nesse caso, as conclusões da análise de variância se aplicam aos dados transformados e devem ser estendidas, com cuidado aos dados originais.

É importante destacar que, lidar com situações nas quais ocorre a violação das suposições de igualdade de variâncias, muitas vezes é um problema complexo. Nem sempre é possível encontrar uma transformação que estabilize a variância. Isso pode ocorrer, por exemplo, quando as observações de tratamentos incluídos no estudo apresentam uma variabilidade, significativamente, diferente da variabilidade das demais observações. A solução de problemas desse tipo envolve, primeiramente, um entendimento das causas que geraram as diferenças na variabilidade. Muitas vezes, essas diferenças podem ser consequência da ocorrência de situações anormais no processo que está sendo avaliado. Caso isso seja constatado, é recomendável coletar novas observações para os tratamentos correspondentes às medidas com grandes diferenças na variabilidade, se este procedimento for possível de ser realizado. Por outro lado, se for uma característica própria do processo, a existência de alguns tratamentos, para os quais as observações apresentam uma variabilidade muito diferente da variabilidade das observações coletadas sob os demais tratamentos, é sugerida a adoção de um outro tipo de modelo que leve esse fato em consideração.

Na análise de variância com amostras de mesmo tamanho, o teste F será ligeiramente afetado, caso a suposições de igualdade de variâncias seja violada.

8.3 - GRÁFICO DA PROBABILIDADE NORMAL

A validade da suposição de normalidade pode ser verificada por meio de um gráfico de probabilidade normal para os

resíduos. Neste gráfico, cada resíduo é representado em função de seu valor esperado, o qual é calculado supondo que os resíduos seguem uma distribuição normal. Será considerado que a suposição de normalidade é válida se os pontos do gráfico estiverem localizados, aproximadamente, ao longo de uma linha reta. Na visualização da linha reta, devem ser enfatizados os valores centrais do gráfico, e não os extremos.

Se no gráfico de probabilidade normal os pontos não estiverem localizados, aproximadamente, ao longo de uma linha reta, terá sido obtida uma indicação de que a suposição de normalidade não é válida.

Para se determinar os valores esperados dos resíduos ordenados, supondo que a condição de normalidade é válida, os quais são necessários para a construção do gráfico e probabilidade normal, serão utilizados os seguintes resultados:

- O valor esperado dos erros ε_{ij} é zero para o modelo de análise de variância considerado;
- O desvio padrão dos erros ε_{ij} é estimado por $\sqrt{QM_{Res}}$

É possível demonstrar que, para uma variável aleatória, com distribuição normal de média zero e desvio padrão estimado por $\sqrt{QM_{Res}}$, é uma boa aproximação para o valor esperado da i -ésima menor observação (E_i), em uma amostra aleatória de tamanho n , é :

$$E_i = \sqrt{QMR} \left[z \left(\frac{i - 0,375}{n + 0,25} \right) \right]$$

onde $z(A)$ representa o $100(A)^\circ$ percentil da distribuição normal padronizada, isto é, $P[z \leq z(A)] = A$ se $z \sim N(0, 1)$.

Como a visualização da aproximação dos pontos, por uma linha reta, é subjetiva, também deve-se calcular o coeficiente de correlação linear (r) entre os resíduos (e_{ij}) e seus valores esperados sob a suposição de normalidade (E_i). A expressão para o cálculo do coeficiente de correlação linear é dada por:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})(e_i - \bar{e})}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2 \sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2 \right]}}$$

onde:

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i \quad \text{e} \quad \bar{E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i$$

Teoricamente $\bar{e} = \bar{E} = 0$. Mas, devido a aproximações realizadas durante os cálculos dos valores para e_i e E_i , essas médias podem não ser iguais a zero.

Um valor próximo de 1, para o coeficiente de correlação linear, é uma indicação da existência de um forte relacionamento linear entre os resíduos e seus valores esperados sob a suposição de normalidade, o que significa dizer que a suposição de normalidade pode ser considerada satisfeita.

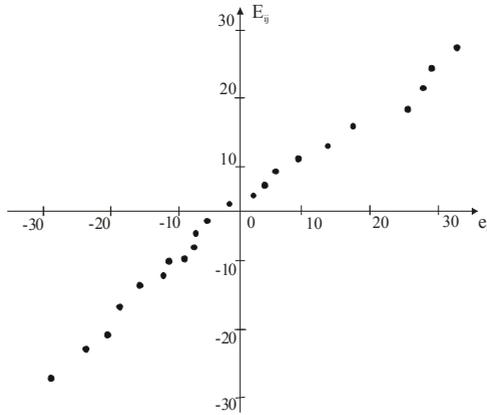


Figura 8.3 - Gráfico da probabilidade Normal para os resíduos

É importante destacar que, se a distribuição dos resíduos ε_{ij} não segue uma distribuição normal, apresentando pequenos desvios em relação a esta distribuição, esse fato não exerce grandes efeitos sobre o teste F, para os intervalos de confiança para as médias e para o método de Duncan de comparações múltiplas.

As violações das suposições de normalidade e variância constante, geralmente ocorrem simultaneamente. Felizmente, na maioria dos casos, a mesma transformação utilizada para estabilizar a variância, também faz com que a distribuição dos resíduos se aproxime da distribuição normal. Portanto, se a ocorrência dessas violações for constatada, em primeiro lugar deve ser empregada uma transformação para estabilizar a variância e a seguir os resíduos devem ser analisados com o objetivo de verificar se a suposição de normalidade ainda continua sendo violada.

Verificação da adequação do modelo de análise de variância

- **Resíduos**

$$e_{ij} = X_{ij} - \bar{X}_i$$

- **Gráficos de Resíduos**

Para avaliar a validade da suposição de

Resíduos contra o tempo

Independência

Resíduos contra médias dos tratamentos \bar{x}_i

Variância constante

Probabilidade normal para os resíduos

Normalidade

- **Teste de normalidade baseado no coeficiente de correlação linear.**

Exemplo:

Uso da análise de variância na fase de **análise** do Ciclo PDCA para melhorar resultados

Uma indústria produz molas de aço, as quais têm a dureza como uma de suas principais características de qualidade, ou seja, a dureza corresponde a uma das variáveis de controle do processo de produção destas molas.

Nesta empresa, o gerenciamento é realizado por meio do Ciclo SDCA. Na fase de verificação do Ciclo SDCA, o monitoramento da estabilidade do processo de produção das molas, em relação ao item de controle da dureza, é feito por meio de gráficos de controle \bar{X} e R . Neste monitoramento, a cada dia são retiradas, em intervalos de tempo regulares, seis amostras de molas produzidas pelo processo, sendo cada amostra de tamanho $n = 4$. A seguir, os valores obtidos para a dureza média e para a amplitude das medidas de dureza de cada amostra são representados nos gráficos de controle correspondentes. Ultimamente, o processo não vem se mostrando estável, tendo sido detectada a seguinte situação nos gráficos de controle \bar{X} e R .

- O gráfico R vem indicando um processo sob controle em relação à variabilidade.

- No gráfico \bar{X} vem ocorrendo pontos acima do limite superior de controle (LSE), indicando que o processo saiu do estado de controle estatístico devido à atuação de alguma causa de variação assinalável, que parece ter provocado um aumento na média do processo.

Essa situação deu origem a uma anomalia crônica, cuja eliminação foi considerada prioritária pela empresa. Foi, então, iniciado o giro do Ciclo PDCA para melhorar resultados.

Note-se que o problema identificado na fase 1 da etapa de Planejamento do Ciclo PDCA foi gerado pela anomalia crônica prioritária identificada a partir do Ciclo SDCA: falta de estabilidade do processo de produção das molas.

Na fase de **observação** do Ciclo PDCA, foi feita uma análise do fenômeno, que consistiu em investigar as características específicas do problema, sob vários pontos de vista, pôr meio de uma realização de estratificação.

Como o aço, utilizado para fabricar as molas, era comprado de três diferentes fornecedores (A, B e C), a equipe da indústria decidiu estratificar os gráficos de controle \bar{X} e R pôr fornecedor de aço.

No entanto, não era possível estratificar os pontos já lançados nos gráficos de controle, porque a indústria não era capaz de identificar, para cada amostra de molas extraída para a construção dos gráficos, qual era o fornecedor do aço que havia sido utilizado como matéria-prima. Em vista desta situação, a equipe da indústria decidiu que, no dia seguinte, o instante em que o aço de cada fornecedor passasse a ser utilizado na produção, seria registrado pelo sistema de controle do estoque de matéria-prima da empresa. A partir do registro destes instantes, seria possível identificar, para este dia, o fornecedor de aço utilizado para produzir as amostras de molas cujos valores de \bar{X} e R seriam lançados nos gráficos de controle. Adotando este procedimento, a equipe de trabalho da empresa coletou os dados apresentados na tabela a seguir.

Tabela 8.1 - Medidas de dureza das Amostras de Molas Retiradas do Processo no dia seguinte

Fornecedor de Aço	Subgrupo	Medidas de Dureza (HB) ¹			
A	13	421,4	414,0	410,6	437,1
C	14	381,2	413,9	415,6	391,3
C	15	385,4	383,9	372,3	374,9
B	16	434,3	387,0	406,2	405,2
B	17	384,1	408,0	404,3	416,1
A	18	448,2	402,7	428,9	420,3

(HB)¹ representa a unidade de medida de dureza definida como índice de dureza Brinell.

Quando os responsáveis pela solução do problema analisaram o gráfico de controle R, estratificado por fornecedor de aço na quarta-feira, foi possível observar que o processo estava sob controle em relação à variabilidade. Já o gráfico \bar{X} apresentava

na quarta-feira três pontos fora dos limites de controle. Os pontos, acima do limite superior de controle (LSC), para as amostras 13 e 18, correspondem à dureza média das molas fabricadas com o aço do fornecedor C.

De posse dessas e outras informações, sobre as características específicas do problema, a equipe da indústria encerrou a fase de observação do Ciclo PDCA e passou à fase de análise, com o objetivo de descobrir a causa fundamental do problema.

Com base nas informações dispostas nos gráficos de controle \bar{X} e R, construídos na fase de observação do Ciclo PDCA, os técnicos da empresa passaram a suspeitar que talvez estivessem ocorrendo problemas com a qualidade do aço comprado dos fornecedores A e C. É importante ressaltar que a suspeita da indústria foi provocada pelo fato de que, a dureza do aço comprado pela empresa, correspondia a um item de verificação do processo de produção das molas, porque uma dureza média inadequada ou uma elevada variabilidade na dureza do aço utilizado poderiam comprometer a qualidade das peças produzidas. No entanto, como os fornecedores de aço foram considerados confiáveis, os itens de verificação referentes a qualidade do aço comprado foram desativados, já que o aço deixou de ser considerado uma causa potencial de problemas. Portanto, a causa a ser analisada em detalhes era a possível queda do nível da qualidade do aço vendido por algum dos fornecedores da indústria. Essa queda do nível de qualidade poderia ser traduzida em termos de uma dureza média inadequada, ou de uma grande variabilidade na dureza do aço que estava sendo vendido a empresa.

Com o objetivo de obter mais informações sobre o comportamento do processo, a equipe de trabalho da indústria construiu um gráfico “Box-plot”, para todas as medida de dureza obtidas na quarta-feira. Para tentar verificar se esta elevada variabilidade poderia estar sendo provocada por diferenças na qualidade do aço comprado dos fornecedores A, B e C.

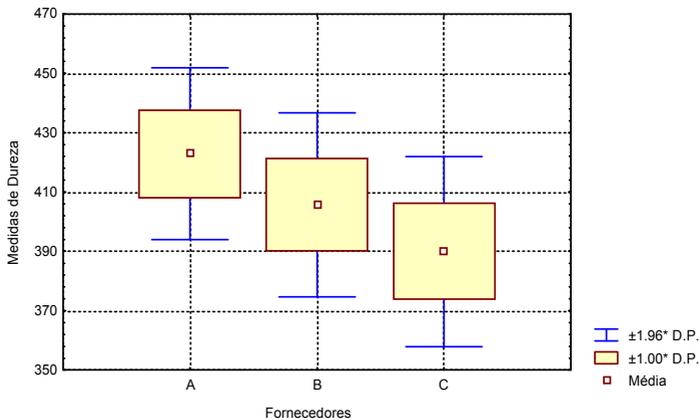


FIGURA 8.1 – Gráfico Box-plot

A partir da análise da figura, é possível notar que há uma diferença entre as distribuições das medidas de dureza das molas fabricadas com o aço dos fornecedores A, B e C. Mais especificamente, parecia que a dureza média das molas produzidas com o aço do fornecedor A era maior que a dureza média, das peças fabricadas com o aço dos fornecedores B e C.

Observa-se que esta indicação estava de acordo com as informações fornecidas pelo gráfico de controle \bar{X} , onde as durezas médias das amostras de molas fabricadas com o aço do fornecedor A estavam acima do LSC do gráfico.

Tabela 8.2 - Dureza das molas de aço retiradas do processo no dia seguinte

Fornec.	Medidas de dureza (HB)								Totais	Médias
	421,4	414,0	410,6	437,1	448,2	402,7	428,9	420,3		
1 (A)	421,4	414,0	410,6	437,1	448,2	402,7	428,9	420,3	3383,2	422,9
2 (B)	434,3	387,0	406,4	405,2	384,1	408,0	404,3	416,1	3245,2	405,7
3 (c)	381,2	313,9	415,6	391,3	385,4	383,9	372,3	374,9	3118,5	389,8
									9746,9	406,1

Com o objetivo de se verificar se realmente existe uma diferença significativa entre as médias de dureza do aço, procedeu-se uma análise de variância, que será realizada a seguir:

RESUMO

Grupo	Contagem	Soma	Média	Variância
Fornecedor 1	8	3383,2	422,9	217,8971
Fornecedor 2	8	3245,2	405,65	250,0143
Fornecedor 3	8	3118,5	389,8125	272,1555

ANOVA

F.V.	S.Q.	G.L.	Q.M.	F _{calc.}	F _{tab.}	Valor-p
Entre	4381,791	2	2190,895	8,881205	3,466795	0,001603
Dentro	5180,469	21	246,689	---	---	---
Total	9562,26	23	---	---	---	---

Conclui-se, então, que existe uma diferença significativa entre as médias dos fornecedores. Procedeu-se, então, com a análise dos resíduos de uma análise de regressão, verificando-se, assim, se os resíduos seguem os pressupostos básicos da ANOVA.

ANÁLISE DOS RESÍDUOS

Uma informação muito importante que deve ser observada para a análise dos resíduos, é a ordem em que os dados foram coletados.

Tabela 8.3 - Resíduos associados as observações

Fornec.	Resíduos*							
1 (A)	-1,5 (1)	-8,9 (2)	-12,3 (3)	14,2 (4)	25,3 (21)	-20,2 (22)	6,0 (23)	-2,6 (24)
2 (B)	28,7 (13)	-18,7 (14)	0,6 (15)	-5,0 (16)	-25,6 (17)	2,4 (18)	-1,4 (19)	10,5 (20)
3 (c)	-8,6 (5)	24,1 (6)	25,8 (7)	1,5 (8)	-4,4 (9)	-5,9 (10)	-17,5 (11)	-14,9 (12)

* os números entre parênteses indicam a ordem de coleta dos dados

GRÁFICO DOS RESÍDUOS E A ORDEM DE COLETA DE DADOS

O primeiro passo é encontrar os resíduos fornecidos pelo modelo, que é obtido pela subtração da média do seu tratamento de cada observação, os quais estão apresentados na tabela a seguir.

Tabela 8.4 - Resíduos fornecidos pelo modelo ordenados

Ordem	Resíduos	Ordem	Resíduos
1	-1,5	13	28,7
2	-8,9	14	-18,7
3	-12,3	15	0,6
4	12,4	16	-5
5	-8,6	17	-25,6
6	24,1	18	2,4
7	25,8	19	-1,4
8	1,5	20	10,5
9	-4,4	21	25,3
10	-5,9	22	-20,2
11	-17,5	23	6
12	-14,9	24	-2,6

Os resíduos encontrados serão representados no gráfico a seguir:

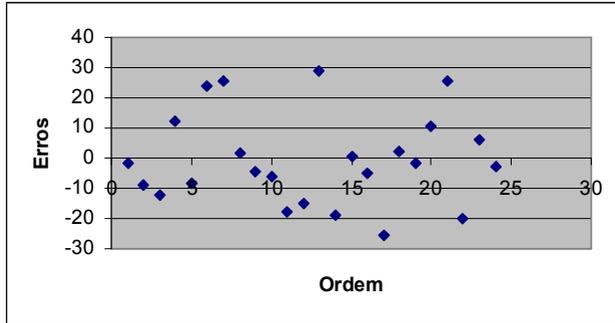


FIGURA 8.2 – Gráfico dos resíduos e a ordem de coleta dos dados

Se este gráfico apresentar configurações especiais, é um sinal de que as observações não são independentes, prejudicando assim a análise realizada.

Para se determinar o gráfico dos resíduos vs. a média dos tratamentos, temos que relacionar cada média com os resíduos encontrados dos seus respectivos tratamentos, conforme mostra a tabela a seguir.

Tabela 8.5 - Médias dos tratamentos e seus respectivos resíduos

Média do tratamento	Resíduos	Média do tratamento	Resíduos	Média do tratamento	Resíduos
422,9	-1,5	405,7	28,7	389,8	-8,6
422,9	-8,9	405,7	-18,7	389,8	24,1
422,9	-12,3	405,7	0,6	389,8	25,8
422,9	12,4	405,7	-5	389,8	1,5
422,9	25,3	405,7	-25,6	389,8	-4,4
422,9	-20,2	405,7	2,4	389,8	-5,9
422,9	6	405,7	-1,4	389,8	-17,5
422,9	-2,6	405,7	10,5	389,8	-14,9

Estes valores tabelados podem ser visualizados na figura abaixo.

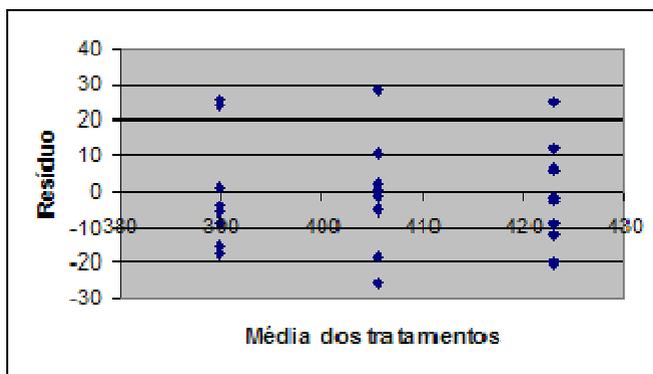


FIGURA 8.3 – Gráfico das médias dos tratamentos e seus respectivos resíduos

Nesse gráfico, as faixas de dispersão dos resíduos, para cada média, são aproximadamente, iguais, o que indicou que a suposição de variâncias iguais pode ser considerada válida

PROCEDIMENTOS PARA O CÁLCULO DA ANÁLISE DE NORMALIDADE DOS RESÍDUOS PARA A ANÁLISE DE VARIÂNCIA - ANOVA

Para se efetuar a análise de normalidade dos resíduos, é necessário seguir estas etapas:

1ª) Colocar os resíduos em ordem crescente

Ordem (i)	Resíduo	E _i	Ordem (i)	Resíduo	E _i
1	-25,6	-30,6	13	-1,5	0,8
2	-20,2	-23,3	14	-1,4	2,4
3	-18,7	-19,7	15	0,6	4,1
4	-17,5	-16,5	16	1,5	5,8
5	-14,9	-13,8	17	2,4	7,5
6	-12,3	-11,8	18	6	9,3
7	-8,9	-9,3	19	10,5	11,8
8	-8,6	-7,5	20	12,4	13,8
9	-5,9	-5,8	21	24,1	16,5
10	-5	-4,1	22	25,3	19,7
11	-4,4	-2,4	23	25,8	23,3
12	-2,6	-0,8	24	28,7	30,6

2ª) Calcular os valores esperados dos resíduos ordenados, sob a suposição de normalidade, utilizando a equação

Para o menor resíduo (i = 1), os cálculos são:

$$E_i = \sqrt{\text{QMR}} \left[z \left(\frac{i - 0,375}{n + 0,25} \right) \right]$$

$$= \frac{1 - 0,375}{n + 0,25} = \frac{1 - 0,375}{24 + 0,25} = 0,0258$$

logo, deve-se procurar a área sob a curva normal correspondente a 0,0258, no extremo inferior, pois o resíduo é negativo, utilizando-se a tabela Z tem-se que:

$(0,5 - 0,0258) = 0,4748$, que corresponde ao escore Z padronizado de 1,95 com sinal negativo, pois tem-se resíduo negativo.

Como QMR = 247 o valor de E_i torna-se:

$$E_i = \sqrt{247} [-1,95] = -30,6$$

3ª) Construir o gráfico de probabilidade normal, representando no eixo horizontal os valores dos resíduos ordenados (e_i) e no eixo vertical os valores esperados dos resíduos ordenados sob a suposição de normalidade (E_i)

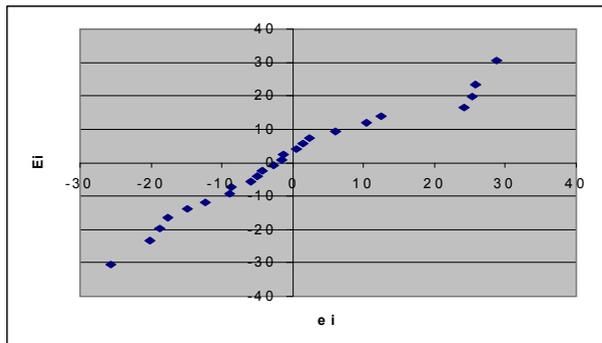


FIGURA 8.4 - Gráfico da probabilidade normal para os resíduos

Pode-se observar que os pontos centrais estão localizados de forma aproximada, ao longo de uma reta que passa pela bissetriz dos quadrantes ímpares.

4ª) Calcular o coeficiente de correlação linear r entre os resíduos (e_i) e seus valores esperados, sob a suposição de normalidade (E_i), por meio da expressão:

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i \quad \bar{E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i \quad r = \frac{\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})(e_i - \bar{e})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2 \sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2}}$$

Na tabela a seguir, apresentam-se os resultados parciais para o cálculo de correlação.

Tabela 8.6 - Cálculos parciais para a obtenção da correlação

Ordem (i)	Resíduo	E_i	E_{im}	$E_i - E_m$	e_{im}	$e_i - e_{im}$	$(E_i - E_m)^2$	$(e_i - e_{im})^2$
1	-25,6	-30,6	-1,5E-16	-30,6	-0,425	-25,175	936,36	633,7806
2	-20,2	-23,3	-1,5E-16	-23,3	-0,425	-19,775	542,89	391,0506
3	-18,7	-19,7	-1,5E-16	-19,7	-0,425	-18,275	388,09	333,9756
4	-17,5	-16,5	-1,5E-16	-16,5	-0,425	-17,075	272,25	291,5556
5	-14,9	-13,8	-1,5E-16	-13,8	-0,425	-14,475	190,44	209,5256
6	-12,3	-11,8	-1,5E-16	-11,8	-0,425	-11,875	139,24	141,0156
7	-8,9	-9,3	-1,5E-16	-9,3	-0,425	-8,475	86,49	71,82563
8	-8,6	-7,5	-1,5E-16	-7,5	-0,425	-8,175	56,25	66,83063
9	-5,9	-5,8	-1,5E-16	-5,8	-0,425	-5,475	33,64	29,97563
10	-5	-4,1	-1,5E-16	-4,1	-0,425	-4,575	16,81	20,93063
11	-4,4	-2,4	-1,5E-16	-2,4	-0,425	-3,975	5,76	15,80063
12	-2,6	-0,8	-1,5E-16	-0,8	-0,425	-2,175	0,64	4,730625
13	-1,5	0,8	-1,5E-16	0,8	-0,425	-1,075	0,64	1,155625
14	-1,4	2,4	-1,5E-16	2,4	-0,425	-0,975	5,76	0,950625
15	0,6	4,1	-1,5E-16	4,1	-0,425	1,025	16,81	1,050625
16	1,5	5,8	-1,5E-16	5,8	-0,425	1,925	33,64	3,705625
17	2,4	7,5	-1,5E-16	7,5	-0,425	2,825	56,25	7,980625
18	6	9,3	-1,5E-16	9,3	-0,425	6,425	86,49	41,28063
19	10,5	11,8	-1,5E-16	11,8	-0,425	10,925	139,24	119,3556
20	12,4	13,8	-1,5E-16	13,8	-0,425	12,825	190,44	164,4806
21	24,1	16,5	-1,5E-16	16,5	-0,425	24,525	272,25	601,4756
22	25,3	19,7	-1,5E-16	19,7	-0,425	25,725	388,09	661,7756
23	25,8	23,3	-1,5E-16	23,3	-0,425	26,225	542,89	687,7506
24	28,7	30,6	-1,5E-16	30,6	-0,425	29,125	936,36	848,2656
Média	-0,425	-1,48E-16				Soma	5337,72	5350,225

Tabela 8.7 - Valores utilizados para se efetuar a correlação:

$E_i - E_m$	$e_i - e_{im}$	$(E_i - E_m) (e_i - e_{im})$
-30,6	-25,175	770,355
-23,3	-19,775	460,7575
-19,7	-18,275	360,0175
-16,5	-17,075	281,7375
-13,8	-14,475	199,755
-11,8	-11,875	140,125
-9,3	-8,475	78,8175
-7,5	-8,175	61,3125
-5,8	-5,475	31,755
-4,1	-4,575	18,7575
-2,4	-3,975	9,54
-0,8	-2,175	1,74
0,8	-1,075	-0,86
2,4	-0,975	-2,34
4,1	1,025	4,2025
5,8	1,925	11,165
7,5	2,825	21,1875
9,3	6,425	59,7525
11,8	10,925	128,915
13,8	12,825	176,985
16,5	24,525	404,6625
19,7	25,725	506,7825
23,3	26,225	611,0425
30,6	29,125	891,225
	Soma	5227,39

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})(e_i - \bar{e})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2 \sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2}}$$

$$r = \frac{5257,39}{\sqrt{5350,255 \cdot 5337,72}} = \frac{5257,39}{\sqrt{2855800,99}} = \frac{5257,39}{5343,96}$$

$$r = 0,978185 \text{ (coeficiente de correlação)}$$

Um valor próximo de 1, para o coeficiente de correlação, é uma indicação de um forte relacionamento linear ente os resíduos e seus valores esperados, sob a suposição de normalidade, o que significa dizer que a suposição de normalidade pode ser considerada.

9 – EXERCÍCIOS REVISIONAIS

Teóricos – Resolvidos

Este capítulo destina-se a fazer uma revisão dos métodos estudados anteriormente. Muitos dos exercícios aqui propostos, foram retirados de livros contendo problemas de análise de variância.

Questão 01

Quais são as pressuposições básicas para a aplicação da ANOVA?

As pressuposições básicas para sua aplicação são:

A variável de interesse seja normalmente distribuídas em todas as populações – Teste de Normalidade;

As “k” populações tenham a mesma variância σ^2 : condição de homocedasticidade.

Questão 02

Em que situações deve ser recomendada a utilização da análise de variância?

A análise de variância é utilizada para comparar média de variância devida aos tratamentos, com a variação devido ao acaso ou residuo.

Esta análise permite que vários grupos sejam comparados ao mesmo tempo, utilizando-se variáveis contínuas.

Destaca-se que o objetivo principal da ANOVA é apontar se um grupo é estaticamente diferente do outro ou não, principalmente quando a hipótese nula é rejeitada, o que se leva a concluir que, pelo menos, uma das médias é diferente das demais.

O Teste deverá ser paramétrico e os grupos devem ser independentes.

Questão 03 (Adaptado de Vieira & Hottmann, 1989)

Para testar três drogas diferentes, uma farmacologista pretende fazer um experimento com cobaias, usando controle. Estão disponíveis 24 cobaias, bastante similares. Como você planejaria o experimento? Discuta a vantagem de usar grupos com número diferente de repetições.

As 24 cobaias deverão ser distribuídas aleatoriamente (ou por sorteio), nos três tipos de drogas utilizadas pela farmacologista.

Como as cobaias são similares, o experimento deverá ser “inteiramente ao acaso” com número de repetições, uma vez que se trata de drogas terapêuticas.

Os blocos serão formados por unidades similares. O sorteio dos tratamentos será realizado dentro de cada bloco, cuidando para que os mesmos sejam repetidos em igual número de vezes, isto porque torna a análise de variância mais fácil e os testes de comparação das medidas são exatos.

Destaca-se, também, que a análise estatística dos experimentos em blocos ao acaso com repetições é de melhor compreensão, desde que o número de unidades dentro de cada bloco seja múltiplo do número de tratamentos que se pretende comparar.

A vantagem de usar grupos, com números diferentes de repetições, decorre do fato de o experimento ser com uso de drogas, e deve-se fazer mais repetições no grupo controle do que nos grupos tratados com a referida droga.

Aplica-se “ANOVA” para que exista condição de homocedasticidade e a variável de interesse seja normalmente distribuída nas populações.

Realizada a análise de variância tem-se:

Se $F_{\text{calc}} > F_{\text{tab}}$, rejeita-se H_0 , concluindo-se que existe diferenças estatísticas significantes entre as médias.

Se $F_{\text{calc}} < F_{\text{tab}}$, aceita-se H_0 , isto é, não existe evidência estatística de que as médias sejam diferentes.

Questão 04 (Adaptado de Vieira & Hottmann, 1989)

Um psicólogo pretende comparar o uso de dois tipos de reforço na aprendizagem de ratos. Dispõe de 23 machos jovens, sendo 9 provindos de seu próprio laboratório de psicologia experimental, 6 provindos de um laboratório de biologia e os demais provindos de um zoológico. O psicólogo suspeita que a origem do animal pode

ser importante na aprendizagem. Como deve delinear o experimento?

Os ratos devem ser distribuídos em três blocos, isto é, em laboratórios: de psicologia experimental, de biologia e de zoológico, sendo que a colocação dos respectivos ratos será de forma aleatória.

Os blocos serão formados por unidades similares, sendo que o sorteio de tratamentos será feito dentro de cada bloco, utilizando tratamentos repetidos em igual número de vezes, para que a análise de variância e os testes de comparação sejam confiáveis.

Faz-se o estudo pela “ANOVA” para que haja condição de homocedasticidade e a variável de interesse seja normalmente distribuída nas populações.

Após a análise, tem-se que:

Se $F_{\text{calc}} > F_{\text{tab}}$, rejeita-se H_0 , concluindo-se que existem diferenças estatísticas significantes entre as médias, ou seja, a origem dos animais pode ser importante na aprendizagem.

Se $F_{\text{calc}} < F_{\text{tab}}$, aceita-se H_0 , isto é, não existe evidência estatística de que as médias sejam diferentes, a origem dos animais não interfere na aprendizagem.

Questão 05 (Adaptado de Vieira & Hottmann, 1989)

Pretende-se fazer um experimento para se verificar se existe diferença na classificação do mesmo tipo de café, obtido de diferentes partidas, quando essa classificação é feita por diferentes degustadores. Cada degustador (tratamento) recebe diversas amostras (repetições) de cada partida. PLaneje o experimento.

Nota: Considere que os efeitos, tanto para tratamentos como para blocos, sejam aleatórios.

As partidas de café deverão ser distribuídas aleatoriamente (ou por sorteio) nos tratamentos.

Como o café é obtido de diferentes partidas, o experimento deverá ser “inteiramente ao acaso”, com igual número de repetições.

Os blocos serão formados por unidades similares, o sorteio dos tratamentos será realizado dentro da cada bloco, cuidando para que os mesmos sejam repetidos em igual número de vezes, isso para que a análise de variância e os testes de comparação das medidas sejam confiáveis.

Aplica-se “ANOVA” para que exista condição de homocedasticidade, e a variável de interesse seja normalmente distribuída nas populações.

Realizada a análise de variância, tem-se:

Se $F_{\text{calc}} > F_{\text{tab}}$, rejeita-se H_0 , concluindo que existem diferenças estatísticas significantes entre as médias, isto significa que há diferenças na classificação do mesmo tipo café de diferentes partidas.

Se $F_{\text{calc}} < F_{\text{tab}}$, aceita-se H_0 , isto é, não existe evidência estatística de que as médias sejam diferentes, ou seja, a classificação do café independe das partidas e dos diferentes degustadores.

10 – EXERCÍCIOS REVISIONAIS

Práticos – Resolvidos

Questão 01 (Adaptado de Drumond *et al.*, 1996)

Uma indústria, fabricante de pigmentos passou a receber nos últimos meses, diversas reclamações sobre a qualidade de um de seus principais produtos. Diante desta situação, foi iniciado o giro do Ciclo PDCA para melhoria de resultados.

Na fase de *análise* do PDCA, nas tarefas de escolha e análise das causas mais prováveis para o problema, a equipe técnica da indústria desejava confirmar sua hipótese de que a causa fundamental, que estava sendo procurada, era a existência de diferenças na qualidade da matéria-prima (cromita) vendida pelos três fornecedores da empresa. Existia a suspeita de que os lotes de cromita, vendidos pelos fornecedores, diferiam, em relação ao teor médio de Cr_2O_3 , e que este fator estava comprometendo a qualidade do produto.

Com o objetivo de avaliar a veracidade dessa suspeita, a equipe da empresa decidiu realizar uma análise de variância utilizando os dados da Tabela 10.1.

Os dados desta tabela representam os resultados obtidos para o teor de Cr_2O_3 de treze lotes de matéria-prima entregues para cada fornecedor. Os valores, entre parênteses, na Tabela 10.1, indicam a ordem de realização das determinações de Cr_2O_3 .

Com base nessa situação, responda às seguintes questões a seguir, baseando-se na tabela abaixo:

Tabela 10.1 - Teores de Cr_2O_3 (%) dos lotes de cromita, vendidos pelos fornecedores da empresa.

Teor	Fornecedor		
	1	2	3
1	46 (18)	49 (1)	44 (31)
2	48 (25)	44 (11)	49 (9)
3	50 (30)	46 (19)	48 (20)
4	45 (26)	47 (7)	48 (8)
5	46 (17)	45 (32)	46 (39)
6	43 (3)	44 (38)	47 (2)
7	46 (37)	42 (16)	47 (28)
8	47 (27)	45 (33)	47 (21)
9	46 (4)	45 (12)	49 (5)
10	44 (36)	48 (6)	50 (29)
11	46 (34)	41 (22)	45 (10)
12	45 (13)	46 (24)	43 (14)
13	51 (23)	48 (35)	46 (15)

Nota: Os números, entre parênteses, representam a ordem de registros das observações

1. Para as medidas do teor de Cr_2O_3 , construa “Box-plots” estratificados, segundo o fator *fornecedor*. Quais são as indicações obtidas por meio da análise dos gráficos abaixo?

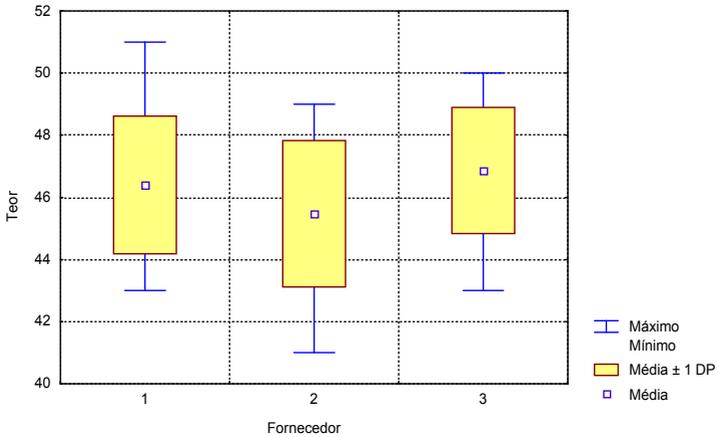


FIGURA 10.1 – Gráficos “Box-plots”, para as medidas do teor de Cr_2O_3 , segundo o fator fornecedor

Conclusão:

Para as medidas do teor Cr_2O_3 , segundo o fator fornecedor, indicam que as medidas estão próximas da média, ou seja, não há uma grande variabilidade entre nenhum dos fornecedores.

2. Construa uma tabela de análise de variância para os dados coletados no estudo. A partir da análise, da tabela, a equipe técnica da empresa poderá concluir que os lotes de matéria-prima, dos três fornecedores, diferem quanto ao teor médio de Cr_2O_3 ? Essa conclusão está de acordo com as indicações fornecidas pelos “Box-plots”?

Valores pelos quais devem ser realizadas as análises de variância, conforme o enunciado da questão 01.

Tabela 10.2 - Teores de Cr_2O_3 (%), dos lotes de cromita vendidos pelos fornecedores da empresa.

Teor	Fornecedor		
	1	2	3
1	46	49	44
2	48	44	49
3	50	46	48
4	45	47	48
5	46	45	46
6	43	44	47
7	46	42	47
8	47	45	47
9	46	45	49
10	44	48	50
11	46	41	45
12	45	47	43
13	51	48	46

RESUMO

Grupo	Contagem	Soma	Média	Variância
Coluna 1	13	603	46,38461538	4,923076923
Coluna 2	13	591	45,46153846	5,602564103
Coluna 3	13	609	46,84615385	4,141025641

ANOVA

Fonte da Variação	S.Q.	G.L.	Q.M.	$F_{\text{calc.}}$	Valor-p	$F_{\text{tab.}}$
Entre	12,9230	2	6,46153	1,32167	0,2793	3,2594
Dentro	176	36	4,8888	---	---	--
Total	188,923	38	---	---	---	---

Conclusão:

Pela análise de variância, tendo em vista os valores de $F_{\text{tab}} = 3,26$ e $F_{\text{calc}} = 1,321$, isto é, $F_{\text{tab}} > F_{\text{calc}}$, a nível de significância de 5%, pode-se afirmar que as médias são, aproximadamente iguais. Essa conclusão está de acordo com as indicações fornecidas pelos "Blox-plots" anteriores, não havendo diferença significativa entre elas.

3. Utilize o método conhecido para fazer comparações, entre os teores médios de Cr_2O_3 , dos lotes de matéria-prima vendidos pelos diferentes fornecedores.

Na realidade, não seria necessário realizar um teste de comparação de médias, pois não existe diferença significativa entre os tratamentos. Mas, pode-se realizar este teste de comparação, o qual seria denominado de não protegido, pois a investigação das médias é realizada independente do resultado da ANOVA.

Comparação de médias utilizando o teste t

Estatística tabelada	
Graus de liberdade	36
Nível de significância	5%
Valor t tabelado	2,03
N. de repetições	13
QMResíduos	4,8888

dms **1,760518**

Tratm.	Médias
Fornec. 1	46,38462
Fornec. 2	45,46154
Fornec. 3	46,84616

Comparação do F1 com F2

Diferença absoluta	0,923077
Médias de F1 e F2	Não diferente

Comparação do F1 com F3

Diferença absoluta	0,461541
Médias de F1 e F3	Não diferente

Comparação do F2 com F3

Diferença absoluta	1,384618
Médias de F2 com F3	Não diferente

4. Avalie a adequação do modelo de análise de variância por meio da análise de resíduos.

(a) Gráfico dos resíduos contra a ordem de coleta dos dados;

Para realizar essa análise, construa os gráficos e faça o teste de avaliação da normalidade. Para tal, necessita-se dos valores da tabela a seguir:

Ordem	Fornecedor	Média	Resíduos
1	49	45,46	3,54
2	47	45,46	1,54
3	43	46,38	-3,38
4	46	46,38	-0,38
5	49	45,46	3,54
6	48	46,38	1,62
7	47	45,46	1,54
8	48	45,46	2,54
9	49	45,46	3,54
10	45	45,46	-0,46
11	44	45,46	-1,46
12	45	45,46	-0,46
13	45	45,46	-0,46
14	43	46,38	-3,38
15	46	46,38	-0,38
16	42	45,46	-3,46
17	46	46,38	-0,38
18	46	46,38	-0,38
19	46	46,38	-0,38
20	48	45,46	2,54
21	47	45,46	1,54
22	41	45,46	-4,46
23	51	46,38	4,62
24	46	46,38	-0,38
25	48	46,38	1,62
26	45	46,38	-1,38
27	47	46,38	0,62
28	47	46,38	0,62

continuação...

29	50	46,84	3,16
30	50	46,84	3,16
31	44	45,46	-1,46
32	45	46,38	-1,38
33	45	46,38	-1,38
34	46	46,38	-0,38
34	48	46,38	1,62
36	44	46,38	-2,38
37	46	46,38	-0,38
38	44	46,38	-2,38
39	46	46,38	-0,38

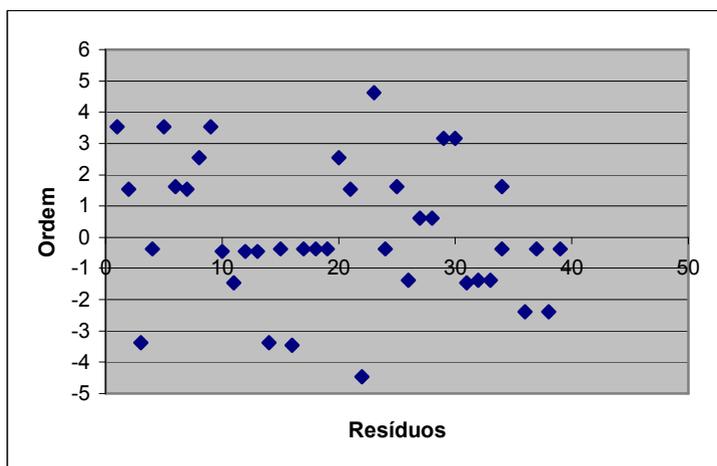


FIGURA 10.2 – Gráfico dos resíduos e a ordem de coleta dos dados

Conclusão:

O comportamento aleatório, dos resíduos, demonstra que as observações são independentes.

(b) Gráfico dos resíduos contra as médias \bar{X}_i ;

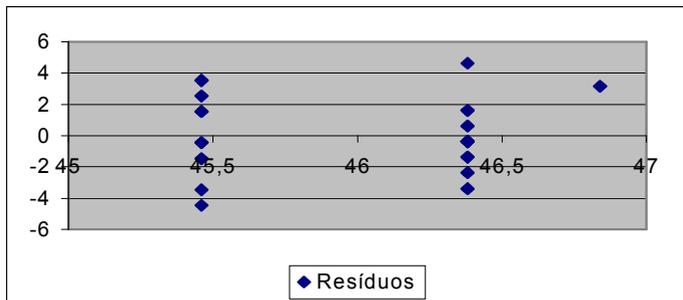


FIGURA 10.3 - Gráfico de resíduos e as médias dos tratamentos

Conclusão:

Pela análise do gráfico, verifica-se que as faixas de dispersão dos resíduos, para cada média, são, aproximadamente, iguais. Esse fato leva a supor que as variâncias iguais podem ser consideradas válidas.

(c) Gráfico da probabilidade normal para os resíduos.

Tabela 10.3 - Cálculo da Análise de Normalidade dos Resíduos para a ANOVA

Ordem	Resíduo	QMR	Z _{tab}	Esperado
1	-4,46	2,21359436	-2,15	-4,759227879
2	-3,46	2,21359436	-1,74	-3,85165419
3	-3,38	2,21359436	-1,5	-3,320391543
4	-3,38	2,21359436	-1,33	-2,944080502
5	-2,38	2,21359436	-1,19	-2,634177291
6	-2,38	2,21359436	-1,07	-2,368545967
7	-1,46	2,21359436	-0,96	-2,125050588
8	-1,46	2,21359436	-0,87	-1,925827095
9	-1,38	2,21359436	-0,78	-1,726603602
10	-1,38	2,21359436	-0,69	-1,52738011
11	-1,38	2,21359436	-0,62	-1,372428505
12	-0,62	2,21359436	-0,54	-1,195340956
13	-0,62	2,21359436	-0,47	-1,04038935
14	-0,46	2,21359436	-0,4	-0,885437745

continuação...

15	-0,46	2,21359436	-0,33	-0,730486139
16	-0,46	2,21359436	-0,26	-0,575534534
17	-0,38	2,21359436	-0,2	-0,442718872
18	-0,38	2,21359436	-0,13	-0,287767267
19	-0,38	2,21359436	-0,07	-0,154951605
20	-0,38	2,21359436	0,00	0,000000000
21	-0,38	2,21359436	0,07	0,154951605
22	-0,38	2,21359436	0,13	0,287767267
23	-0,38	2,21359436	0,2	0,442718872
24	-0,38	2,21359436	0,03	0,066407831
25	-0,38	2,21359436	0,33	0,730486139
26	1,54	2,21359436	0,4	0,885437745
27	1,54	2,21359436	0,47	1,04038935
28	1,54	2,21359436	0,54	1,195340956
29	1,62	2,21359436	0,62	1,372428505
30	1,62	2,21359436	0,69	1,52738011
31	1,62	2,21359436	0,78	1,726603602
32	2,54	2,21359436	0,87	1,925827095
33	2,54	2,21359436	0,09	0,199223493
34	3,16	2,21359436	1,07	2,368545967
35	3,16	2,21359436	1,19	2,634177291
36	3,54	2,21359436	1,33	2,944080502
37	3,54	2,21359436	1,5	3,320391543
38	3,54	2,21359436	1,74	3,85165419
39	4,62	2,21359436	2,15	4,759227879

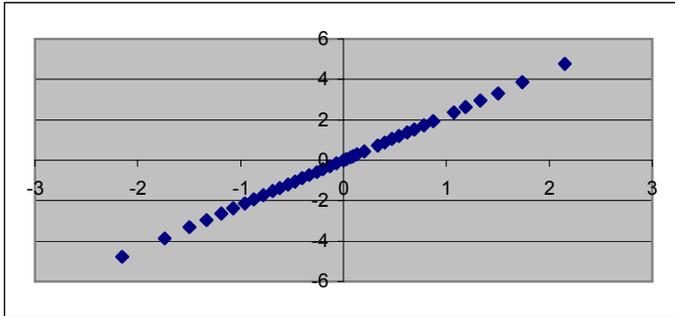


FIGURA 10.4 – Gráfico da probabilidade normal para os resíduos

Conclusão:

Observa-se que a distribuição dos pontos centrais aproxima-se do traçado de uma reta que passa pela bissetriz dos quadrantes ímpares, logo a suposição da normalidade continua não violada, ou seja, o modelo de análise de variância, por meio da análise dos resíduos, é válido para comparar os teores médios de Cr_2O_3 .

5. Com base nos resultados obtidos no item 4, considera que a equipe técnica da indústria pode confiar nas conclusões estabelecidas nos itens 2 e 3?

Sim, é possível, haja vista que a conclusão “2” coincide com a conclusão dos “Box-plots”, do item “1” e essas são correlatas à obtida no item “3”. Logo, os teores de Cr_2O_3 não diferem entre os fornecedores.

11 – EXERCÍCIOS REVISIONAIS

Propostos

Questão 01

Considera-se a empresa de mineração, apresentada na questão anterior, mas agora as informações a serem analisadas são a queima do processo de pelotização.

A etapa de queima consiste no tratamento térmico das pelotas cruas, em um forno de grelha móvel, sendo uma das principais etapas da pelotização.

Com o objetivo de evitar o desgaste excessivo e o superaquecimento dos carros de grelha do forno, os mesmos recebem camadas de forramento constituídas de pelotas queimadas. As pelotas cruas, cuja umidade deve estar em uma faixa apropriada com o objetivo de assegurar um bom desempenho no forno, no que diz respeito ao item de controle *consumo térmico*, são distribuídas sobre a camada de forramento, dando-se início ao tratamento térmico.

O *consumo térmico* do forno representa um dos maiores custos de todo o processo e permite o controle da eficiência térmica da queima.

Recentemente, a equipe técnica responsável pelo processo de queima iniciou o giro do Ciclo PDCA, para melhorar resultados com o objetivo de reduzir o consumo térmico do forno.

Na fase de **análise** do Ciclo PDCA, a equipe da empresa estava estudando o efeito dos fatores *umidade média das*

pelotas e espessura da camada de forramento sobre o consumo térmico do forno. Nesse estudo, foram coletados os dados apresentados na Tabela 3, a partir de dados registrados rotineiramente pela indústria, para o monitoramento do processo de queima. Nesta Tabela, os números, entre parênteses, representam a ordem de coleta dos dados.

1. Utilizando os dados da tabela a seguir, construa uma tabela de análise de variância e estabeleça conclusões.

TABELA 11.1 - Medidas do consumo térmico do forno (kcal/t), após multiplicação por 10^{-3} .

Espessura	Teor de Umidade			
	1	2	3	4
1	215 (09)	235 (02)	210 (27)	251 (07)
	208 (17)	229 (15)	201 (29)	246 (05)
	212 (26)	277 (14)	264 (23)	242 (22)
2	234 (10)	269 (04)	257 (28)	247 (25)
	279 (08)	274 (16)	262 (30)	253 (20)
	283 (32)	204 (31)	228 (36)	249 (06)
3	273 (33)	207 (11)	239 (34)	217 (18)
	240 (13)	212 (12)	232 (01)	222 (35)
	238 (03)	205 (24)	242 (21)	218 (19)

Nota: Os números entre parênteses representam a ordem de coleta das observações

- a) Construa o gráfico das respostas médias para os tratamentos considerados neste estudo (combinações *teor de umidade e espessura da camada de forramento*).
- b) Avalie a adequação do modelo de análise de variância por meio da análise de resíduos. As conclusões obtidas no item são confiáveis?

- c) Utilize um método de comparação conhecido para comparar o consumo térmico para os diferentes teores de umidade quando se utiliza a espessura “1”. Faça o mesmo considerando a espessura “3”.
- d) Tendo em vista o objetivo do estudo, em quais níveis do teor de umidade das pelotas e da espessura da camada de forramento o processo deve ser ajustado?

Questão 02

Na mesma empresa de mineração, as informações a serem analisadas referem-se a etapa de espessamento / homogeneização do processo de pelotização.

Após a etapa de moagem, o produto resultante é uma polpa com cerca de 80% de água e 20% de sólidos. Esta polpa é bombeada para um espessador, onde é feita a recuperação da água do processo, com o conseqüente adensamento e elevação do teor de sólidos para 70%. Do espessador, a polpa do minério é bombeada para tanques homogeneizadores, que recebem também uma pequena quantidade de polpa de carvão. Após a mistura e homogeneização das polpas, o material é enviado à seção de filtração.

A *densidade de alimentação da filtração* representa um importante item de controle do processo de espessamento/homogeneização.

Recentemente, a equipe técnica, responsável pelo processo de espessamento/homogeneização, iniciou o giro do Ciclo PDCA para melhorar resultados, com o objetivo de aumentar a capacidade do processo em relação a este item de controle.

Na fase de **análise** do Ciclo PDCA, a equipe estava estudando o efeito dos fatores *espessador* (a empresa

utilizava dois espessadores) e *tanque homogeneizador* (eram empregados três tanques) sobre a *densidade de alimentação da filtragem*. Nesse estudo, foram coletados os dados apresentados na tabela a seguir, a partir de dados registrados rotineiramente pela indústria para o monitoramento do processo de espessamento/homogeneização. Nesta tabela, os números entre parênteses representam a ordem de coleta dos dados.

Tabela 11.2 - Medidas da Densidade de Alimentação da Filtragem (g/cm³)

Espessador	Tanque Homogeneizador		
	1	2	3
1	2,33 (8)	2,32 (17)	2,37 (18)
	2,27 (4)	2,23 (13)	2,33 (5)
	2,30 (1)	2,29 (11)	2,31 (2)
2	2,30 (10)	2,21 (7)	2,39 (16)
	2,38 (15)	2,25 (3)	2,34 (12)
	2,34 (9)	2,30 (6)	2,38 (14)

Nota: Os números entre parênteses representam a ordem de coleta das observações

a) Para as medidas de densidade de alimentação, construa os seguintes gráficos:

- “Box-plots” estratificados pelo fator espessador;
- “Box-plots” estratificados pelo fator tanque homogeneizador;
- “Box-plots” estratificados pela combinação dos níveis dos fatores espessador e tanque homogeneizador.

Quais são as indicações obtidas pela análise destes gráficos?

b) Construa uma tabela de análise de variância para os dados coletados no estudo e estabeleça conclusões. Estas conclusões estão de acordo com as indicações obtidas a partir da análise dos “Box-plots”?

c) Utilize o método conhecido para fazer as comparações que você achar convenientes.

A partir dos resultados obtidos, qual conclusão pode ser estabelecida?

d) Avalie a adequação do modelo de análise de variância por meio da análise de resíduos. Para isso construa os seguintes gráficos.

(i) Gráfico de resíduos contra a ordem de coleta dos dados;

(ii) Gráfico de resíduos contra os níveis do fator espessador;

(iii) Gráfico de resíduos contra os níveis do fator tanque homogeneizador;

(iv) Gráfico de resíduos contra respostas médias dos tratamentos;

(v) Gráfico de probabilidade normal para os resíduos.

e) A partir dos resultados obtidos no item anterior, considera que a equipe técnica pode confiar nas conclusões estabelecidas nos itens 2 e 3?

Questão 03 (adaptado de Drumond *et al.*, 1996)

Uma empresa de mineração opera um grande complexo de pelletização, exportando minério de ferro sob a forma de pelotas para diversos países do mundo. A pelletização é um processo de aglomeração cuja finalidade é agregar, com o

recurso de um processamento térmico, a parcela ultrafina (abaixo de 0,149mm) do minério de ferro, em esferas de diâmetros adequados, com características de qualidade que permitam sua aplicação direta nos fornos siderúrgicos.

No complexo de pelotização da empresa, o *gerenciamento para manter* é realizado por meio do giro do Ciclo SDCA e durante todo o processo de pelotização é feita análise estatística dos principais parâmetros do processo, para garantir a qualidade do produto final.

A etapa de pelotização é realizada em equipamentos denominados discos de pelotização. Estes discos giram com velocidade e inclinação adequados, de modo que, por movimentos sucessivos de rolamento, as partículas do material, proveniente das etapas anteriores do processo, vão sendo agregadas, até a obtenção das chamadas pelotas cruas. A empresa utiliza quatro discos neste processo e cada disco dispõe de um sistema de aspersão de água que permite o ajuste da umidade das pelotas.

A umidade das pelotas é um importante item de controle do processo de pelotamento, e as especificações estabelecem que ela deve ser situada na faixa de 8,0% a 12,0%, para garantir um funcionamento adequado do forno onde, posteriormente, será feita a queima das pelotas de minério de ferro.

Recentemente foi verificado que o processo de pelotamento, mesmo se mantendo sob controle estatístico, havia deixado de ser capaz de atender às especificações estabelecidas para a umidade das pelotas, gerando várias dificuldades para o processo seguinte.

Esta situação deu origem a uma anomalia crônica, cuja eliminação foi considerada prioritária pela empresa. Foi,

então, iniciado o giro do Ciclo PDCA, para melhorar resultados.

Observe que o **problema identificado** na fase 1 da etapa P, do Ciclo PDCA, foi gerado pela anomalia crônica prioritária identificada a partir do Ciclo SDCA: *incapacidade do processo de pelotamento em atender às especificações para o teor de umidade das pelotas*.

Na fase de **observação**, do Ciclo PDCA, foi feita uma análise do fenômeno, para que as características do problema pudessem ser reconhecidas. A análise do fenômeno consistiu em investigar as características específicas do problema, com uma visão ampla e sob vários pontos de vista, por meio da realização de uma estratificação.

Como a equipe técnica da empresa suspeitava que podiam haver diferenças na forma de funcionamento dos quatro discos, o que poderia implicar na manifestação do problema em intensidades diferentes em cada disco e, até mesmo, poderia significar que apenas um dos equipamentos era o responsável pela falta de capacidade do processo, na fase de observação foram feitas medidas do teor da umidade das pelotas, estratificadas por disco de pelotamento. Os dados obtidos estão apresentados na tabela a seguir. Nesta tabela, os número entre parênteses representam a ordem de coleta dos dados.

Tabela 11.3 - Medidas do Teor de Umidade (%) das Pelotas Cruas

Disco	Teor de umidade					
1	9,9 (7)	9,7 (16)	9,5 (17)	8,9 (9)	10,3 (5)	11,1 (12)
2	7,8 (14)	8,4 (3)	9,5 (8)	9,1 (22)	8,1 (18)	8,3 (4)
3	9,9 (10)	11,0 (21)	10,1 (2)	11,2 (19)	10,3 (13)	
4	10,5 (15)	9,5 (1)	10,4 (11)	9,3 (20)	8,9 (6)	

Nota: Os números entre parênteses representam a ordem de coleta das observações.

- 1) Para as medidas do teor de umidades, construa “boxplots” estratificados segundo, o fator *disco de pelotamento*. Quais são as indicações obtidas por meio da análise destes gráficos?
- 2) Construa uma tabela de análise de variância para os dados coletados no estudo. A partir da análise desta tabela, qual conclusão pode ser estabelecida? Esta conclusão está de acordo com as indicações fornecidas pelos “Box-plots”?
- 3) Utilize o método conhecido para fazer comparações entre os teores médios de umidade das pelotas produzidas pelos diferentes discos.
- 4) Avalie a adequação do modelo de análise de variância por meio da análise de resíduos.
- 5) A partir dos resultados obtidos, no item anterior, considera que o engenheiro pode confiar nas conclusões estabelecidas nos itens 2, 3 e 4?

12 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUSSAB, W. de O. & MORETTIN, P.A. **Estatística básica**. 5 ed, São Paulo: Saraiva, 2002.

CHRISTMANN, R.U. **Estatística aplicada**. 2 ed., São Paulo: Edgard Blücher, 1985.

COCHRAN, W.G., COX, G.M. **Experimental design**. New York: John Wiley & Sons, 1968. 611p.

DRUMOND, F.B., WERKEMA, M.C.C. & AGUIAR, S. **Análise de variância: comparação de várias situações**. v. 6, Belo Horizonte: QFCO, 1996.

FONSECA, J.S. da, MARTINS, G. de A. & TOLEDO, G.L. **Estatística aplicada**. 2 ed., São Paulo: Atlas, 1995.

GOMES, F.P. **Curso de estatística experimental**. 13. ed., Piracicaba: Nobel, 1996.

GUERRA, M.J. & DONAIRE, D. **Estatística intuitiva**. 5 ed. São Paulo: LTC, 1991.

HOFFMANN, R. & VIEIRA, S. **Estatística experimental**. São Paulo: Atlas, 1989.

JOHN, P.W.M. **Statistical design and analysis of experiments**. New York: Macmilan, 1971. 355p.

LANDIN, B.M.P. **Análise estatística de dados geológicos**. São Paulo: UNESP, 1998.

LEVINE, D. M., BERENSON, M. L., STEPHAN, D.
Estatística: teoria e aplicações. Rio de Janeiro: AS (LTC),
2000.

MALHOTRA, N.K. **Pesquisa de marketing: uma orientação
aplicada.** 3 ed., Porto Alegre: Bookman, 2001.

MENDENHALL, W, **Probabilidade e estatística.** v. I, Rio de
Janeiro: Campus, 1985.

MENDENHALL, W, **Probabilidade e estatística.** v. II, Rio de
Janeiro: Campus, 1985.

MEYER, P.L. **Probabilidade - aplicações à estatística.** 2
ed., Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983. 426p.

MILONE, G. & ANGELINI, F. **Estatística geral.** v. I, São
Paulo: Atlas, 1993.

MILONE, G. & ANGELINI, F. **Estatística geral.** v. II, São
Paulo: Atlas, 1993.

MONTGOMERY, D.C. **Design and analyses of experiments.**
3 ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.

MONTGOMERY, D.C. **Introduction to statistical quality
control.** 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 1997.

MORETTIN, L.G. **Estatística básica.** v. 2., São Paulo:
Makron Books, 2000.

MOOD, A.M.; GREYBILL, F.A.; BOES, D.C. **Introduction to
the theory of statistics.** 3 ed., New York: McGraw-Hill, 1974.
564p.

PERES, C. de A., SALDIVA, C. D. **Planejamento de experimentos**. 5 Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística. Associação Brasileira de Estatística. 1998.

PIMENTEL GOMES, F. **Curso de estatística experimental**. 11 ed. São Paulo: Nobel, 1985, 466p.

SIQUEIRA, L.G.P. **Controle estatístico do processo**. São Paulo: Pioneira, 1997.

SNEDECOR, G.W.; COCHRAN, W.G. **Statistical methods**. 6 ed. Ames: Iowa State University Press, 1967. 593p.

SOUNIS, E. **Bioestatística**. 3 ed. Rio Janeiro/São Paulo: Livraria Atheneu, 1985.

STEEL, R.G.D.; TORRIE, J.J. **Principles and procedures of statistics**. New York: McGraw-Hill. 1969. 481p.

STORCK, L; LOPES, S.J. **Experimentação II**. Santa Maria: Departamento Fitotecnia / UFSM, 1997. 207p.

STORCK, L; LOPES, S.J. **Experimentação Vegetal**. Santa Maria: Departamento Fitotecnia / UFSM, 2000. 198p.

VIEIRA, S. & HOFFMANN, R. **Estatística experimental**. São Paulo: Atlas, 1989.

VIEIRA, S. **Estatística para a qualidade – como avaliar com precisão a qualidade em produtos e serviços**. Rio de Janeiro: Campus, 1999.

WERKEMA, M.C.C. & AGUIAR, S. **Análise de regressão: Como entender o relacionamento entre variáveis de um processo**. v. 7., Belo Horizonte: QFCO, 1996.

WERKEMA, M.C.C. **As Ferramentas da qualidade no gerenciamento de processos**. v. 1., Belo Horizonte: QFCO, 1996.

WERKEMA, M.C.C. **Como estabelecer conclusões com confiança: entendendo inferência estatística**. v. 4., Belo Horizonte: QFCO, 1996.

WERKEMA, M.C.C. **Ferramentas estatísticas básicas para o gerenciamento de processos**. v. 2., Belo Horizonte: QFCO, 1995.

WONNACOTT, H.T., WONNACOT, R. J. **Introductory statistics**. 5 ed., New York: John Wiley & Sons, 1990.

ANEXOS

TABELA A.1 – Valores de q para o nível de significância de 1% segundo o número de tratamentos e os graus de liberdade do resíduo

G.L. do resíduo	Número de tratamentos (k)																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	90,0	135	164	186	202	216	227	237	246	253	260	266	272	277	282	286	290	294	298	
2	14,0	19,0	22,3	24,7	26,6	28,2	29,5	30,7	31,7	32,6	33,4	34,1	34,8	35,4	36,0	36,5	37,0	37,5	37,9	
3	8,26	10,6	12,2	13,3	14,2	15,0	15,6	16,2	16,7	17,1	17,5	17,9	18,2	18,5	18,8	19,1	19,3	19,5	19,8	
4	6,51	8,12	9,17	9,96	10,6	11,1	11,5	11,9	12,3	12,6	12,8	13,1	13,3	13,5	13,7	13,9	14,1	14,2	14,4	
5	5,70	6,97	7,80	8,42	8,91	9,32	9,67	9,97	10,2	10,5	10,7	10,9	11,1	11,2	11,4	11,6	11,7	11,8	11,9	
6	5,24	6,33	7,03	7,56	7,97	8,32	8,61	8,87	9,10	9,30	9,49	9,65	9,81	9,95	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	
7	4,95	5,92	6,54	7,01	7,37	7,68	7,94	8,17	8,37	8,55	8,71	8,86	9,00	9,12	9,24	9,35	9,46	9,55	9,65	
8	4,74	5,63	6,20	6,63	6,96	7,24	7,47	7,68	7,87	8,03	8,18	8,31	8,44	8,55	8,66	8,76	8,85	8,94	9,03	
9	4,60	5,43	5,96	6,35	6,66	6,91	7,13	7,32	7,49	7,65	7,78	7,91	8,03	8,13	8,23	8,32	8,41	8,49	8,57	
10	4,48	5,27	5,77	6,14	6,43	6,67	6,87	7,05	7,21	7,36	7,48	7,60	7,71	7,81	7,91	7,99	8,07	8,15	8,22	
11	4,39	5,14	5,62	5,97	6,25	6,48	6,67	6,84	6,99	7,13	7,25	7,36	7,46	7,56	7,65	7,73	7,81	7,88	7,95	
12	4,32	5,04	5,50	5,84	6,10	6,32	6,51	6,67	6,81	6,94	7,06	7,17	7,26	7,36	7,44	7,52	7,59	7,66	7,73	
13	4,26	4,96	5,40	5,73	5,98	6,19	6,37	6,53	6,67	6,79	6,90	7,01	7,10	7,19	7,27	7,34	7,42	7,48	7,55	
14	4,21	4,89	5,32	5,63	5,88	6,08	6,26	6,41	6,54	6,66	6,77	6,87	6,96	7,05	7,12	7,20	7,27	7,33	7,39	
15	4,17	4,83	5,25	5,56	5,80	5,99	6,16	6,31	6,44	6,55	6,66	6,76	6,84	6,93	7,00	7,07	7,14	7,20	7,26	
16	4,13	4,78	5,19	5,49	5,72	5,92	6,08	6,22	6,35	6,46	6,56	6,66	6,74	6,82	6,90	6,97	7,03	7,09	7,15	
17	4,10	4,74	5,14	5,43	5,66	5,85	6,01	6,15	6,27	6,38	6,48	6,57	6,66	6,73	6,80	6,87	6,94	7,00	7,05	
18	4,07	4,70	5,09	5,38	5,60	5,79	5,94	6,08	6,20	6,31	6,41	6,50	6,58	6,65	6,72	6,79	6,85	6,91	6,96	
19	4,05	4,67	5,05	5,33	5,55	5,73	5,89	6,02	6,14	6,25	6,34	6,43	6,51	6,58	6,65	6,72	6,78	6,84	6,89	
20	4,02	4,64	5,02	5,29	5,51	5,69	5,84	5,97	6,09	6,19	6,29	6,37	6,45	6,52	6,59	6,65	6,71	6,76	6,82	
24	3,96	4,54	4,91	5,17	5,37	5,54	5,69	5,81	5,92	6,02	6,11	6,19	6,26	6,33	6,39	6,45	6,51	6,56	6,61	
30	3,89	4,45	4,80	5,05	5,24	5,40	5,54	5,65	5,76	5,85	5,93	6,01	6,08	6,14	6,20	6,26	6,31	6,36	6,41	
40	3,82	4,37	4,70	4,93	5,11	5,27	5,39	5,50	5,60	5,69	5,77	5,84	5,90	5,96	6,02	6,07	6,12	6,17	6,21	
60	3,76	4,28	4,60	4,82	4,99	5,13	5,25	5,36	5,45	5,53	5,60	5,67	5,73	5,79	5,84	5,89	5,93	5,98	6,02	
120	3,70	4,20	4,50	4,71	4,87	5,01	5,12	5,21	5,30	5,38	5,44	5,51	5,56	5,61	5,66	5,71	5,75	5,79	5,83	
∞	3,64	4,12	4,40	4,60	4,76	4,88	4,99	5,08	5,16	5,23	5,29	5,35	5,40	5,45	5,49	5,54	5,57	5,61	5,65	

TABELA A.2 – Valores de q para o nível de significância de 5% segundo o número de tratamentos e os graus de liberdade do resíduo

G.L. do resíduo	Número de tratamentos (k)																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	18,0	27,0	32,8	37,1	40,4	43,1	45,4	47,4	49,1	50,6	52,0	53,2	54,3	55,4	56,3	57,2	58,0	58,8	59,6	
2	6,08	8,33	9,80	10,9	11,7	12,4	13,0	13,5	14,0	14,4	14,7	15,1	15,4	15,7	15,9	16,1	16,4	16,6	16,8	
3	4,50	5,91	6,82	7,50	8,04	8,48	8,85	9,18	9,46	9,72	9,95	10,2	10,3	10,5	10,7	10,8	11,0	11,1	11,2	
4	3,93	5,04	5,76	6,29	6,71	7,05	7,35	7,60	7,83	8,03	8,21	8,37	8,52	8,66	8,79	8,91	9,03	9,13	9,23	
5	3,64	4,60	5,22	5,67	6,03	6,33	6,58	6,80	6,99	7,17	7,32	7,47	7,60	7,72	7,83	7,93	8,03	8,12	8,21	
6	3,46	4,34	4,90	5,30	5,63	5,90	6,12	6,32	6,49	6,65	6,79	6,92	7,03	7,14	7,24	7,34	7,43	7,51	7,59	
7	3,34	4,16	4,68	5,06	5,36	5,61	5,82	6,00	6,16	6,30	6,43	6,55	6,66	6,76	6,85	6,94	7,02	7,10	7,17	
8	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,40	5,60	5,77	5,92	6,05	6,18	6,29	6,39	6,48	6,57	6,65	6,73	6,80	6,87	
9	3,20	3,95	4,41	4,76	5,02	5,24	5,43	5,59	5,74	5,87	5,98	6,09	6,19	6,28	6,36	6,44	6,51	6,58	6,64	
10	3,15	3,88	4,33	4,65	4,91	5,12	5,30	5,46	5,60	5,72	5,83	5,93	6,03	6,11	6,19	6,27	6,34	6,40	6,47	
11	3,11	3,82	4,26	4,57	4,82	5,03	5,20	5,35	5,49	5,61	5,71	5,81	5,90	5,98	6,06	6,13	6,20	6,27	6,33	
12	3,08	3,77	4,20	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,39	5,51	5,61	5,71	5,80	5,88	5,95	6,02	6,09	6,15	6,21	
13	3,06	3,73	4,15	4,45	4,69	4,88	5,05	5,19	5,32	5,43	5,53	5,63	5,71	5,79	5,86	5,93	5,99	6,05	6,11	
14	3,03	3,70	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	5,25	5,36	5,46	5,55	5,64	5,71	5,79	5,85	5,91	5,97	6,03	
15	3,01	3,67	4,08	4,37	4,59	4,78	4,94	5,08	5,20	5,31	5,40	5,49	5,57	5,65	5,72	5,78	5,85	5,90	5,96	
16	3,00	3,65	4,05	4,33	4,56	4,74	4,90	5,03	5,15	5,26	5,35	5,44	5,52	5,59	5,66	5,73	5,79	5,84	5,90	
17	2,98	3,63	4,02	4,30	4,52	4,70	4,86	4,99	5,11	5,21	5,31	5,39	5,47	5,54	5,61	5,67	5,73	5,79	5,84	
18	2,97	3,01	4,00	4,28	4,49	4,67	4,82	4,96	5,07	5,17	5,27	5,35	5,43	5,50	5,57	5,63	5,69	5,74	5,79	
19	2,96	3,59	3,98	4,25	4,47	4,65	4,79	4,92	5,04	5,14	5,23	5,31	5,39	5,46	5,53	5,59	5,65	5,70	5,75	
20	2,95	3,58	3,96	4,23	4,45	4,62	4,77	4,90	5,01	5,11	5,20	5,28	5,36	5,43	5,49	5,55	5,61	5,66	5,71	
24	2,92	3,53	3,90	4,17	4,37	4,54	4,68	4,81	4,92	5,01	5,10	5,18	5,25	5,32	5,38	5,44	5,49	5,55	5,59	
30	2,89	3,49	3,85	4,10	4,30	4,46	4,60	4,72	4,82	4,92	5,00	5,08	5,15	5,21	5,27	5,33	5,38	5,43	5,47	
40	2,86	3,44	3,79	4,04	4,23	4,39	4,52	4,63	4,73	4,82	4,90	4,98	5,04	5,11	5,16	5,22	5,27	5,31	5,36	
60	2,83	3,40	3,74	3,98	4,16	4,31	4,44	4,55	4,65	4,73	4,81	4,88	4,94	5,00	5,06	5,11	5,15	5,20	5,27	
120	2,80	3,36	3,68	3,92	4,10	4,24	4,36	4,47	4,56	4,64	4,71	4,78	4,84	4,90	4,95	5,00	5,04	5,09	5,13	
∞	2,77	3,31	3,63	3,86	4,03	4,17	4,29	4,39	4,47	4,55	4,62	4,68	4,74	4,80	4,85	4,89	4,93	4,97	5,01	

TABELA A.3 – Valores de q para o nível de significância de 10% segundo o número de tratamentos e os graus de liberdade do resíduo

G.L. do resíduo	Número de tratamentos (k)																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	8,93	13,4	16,4	18,5	20,2	21,5	22,6	23,6	24,5	25,2	25,9	26,5	27,1	27,6	28,1	28,5	29,0	29,3	29,7	
2	4,13	5,73	6,77	7,54	8,14	8,63	9,05	9,41	9,72	10,0	10,3	10,5	10,7	10,9	11,1	11,2	11,4	11,5	11,7	
3	3,33	4,47	5,20	5,74	6,16	6,51	6,81	7,06	7,29	7,49	7,67	7,83	7,98	8,12	8,25	8,37	8,48	8,58	8,68	
4	3,01	3,98	4,59	5,03	5,39	5,68	5,93	6,14	6,33	6,49	6,65	6,78	6,91	7,02	7,13	7,23	7,33	7,41	7,50	
5	2,85	3,72	4,26	4,66	4,98	5,24	5,46	5,65	5,82	5,97	6,10	6,22	6,34	6,44	6,54	6,63	6,71	6,79	6,86	
6	2,75	3,56	4,07	4,44	4,73	4,97	5,17	5,34	5,50	5,64	5,76	5,87	5,98	6,07	6,16	6,25	6,32	6,40	6,47	
7	2,68	3,45	3,93	4,28	4,55	4,78	4,97	5,14	5,28	5,41	5,53	5,64	5,74	5,83	5,91	5,99	6,06	6,13	6,19	
8	2,63	3,37	3,83	4,17	4,43	4,65	4,83	4,99	5,13	5,25	5,36	5,46	5,56	5,64	5,72	5,80	5,87	5,93	6,00	
9	2,59	3,32	3,76	4,08	4,34	4,54	4,72	4,87	5,01	5,13	5,23	5,33	5,42	5,51	5,58	5,66	5,72	5,79	5,85	
10	2,56	3,27	3,70	4,02	4,26	4,47	4,64	4,78	4,91	5,03	5,13	5,23	5,32	5,40	5,47	5,54	5,61	5,67	5,73	
11	2,54	3,23	3,66	3,96	4,20	4,40	4,57	4,71	4,84	4,95	5,05	5,15	5,23	5,31	5,38	5,45	5,51	5,57	5,63	
12	2,52	3,20	3,62	3,92	4,16	4,35	4,51	4,65	4,78	4,89	4,99	5,08	5,16	5,24	5,31	5,37	5,44	5,49	5,55	
13	2,50	3,18	3,59	3,88	4,12	4,30	4,46	4,60	4,72	4,83	4,93	5,02	5,10	5,18	5,25	5,31	5,37	5,43	5,48	
14	2,49	3,16	3,56	3,85	4,08	4,27	4,42	4,56	4,68	4,79	4,88	4,97	5,05	5,12	5,19	5,26	5,32	5,37	5,43	
15	2,48	3,14	3,54	3,83	4,05	4,23	4,39	4,52	4,64	4,75	4,84	4,93	5,01	5,08	5,15	5,21	5,27	5,32	5,38	
16	2,47	3,12	3,52	3,80	4,03	4,21	4,36	4,49	4,61	4,71	4,81	4,89	4,97	5,04	5,11	5,17	5,23	5,28	5,33	
17	2,46	3,11	3,50	3,78	4,00	4,18	4,33	4,46	4,58	4,68	4,77	4,86	4,93	5,01	5,07	5,13	5,19	5,24	5,30	
18	2,45	3,10	3,49	3,77	3,98	4,16	4,31	4,44	4,55	4,65	4,75	4,83	4,90	4,98	5,04	5,10	5,16	5,21	5,26	
19	2,45	3,09	3,47	3,75	3,97	4,14	4,29	4,42	4,53	4,63	4,72	4,80	4,88	4,95	5,01	5,07	5,13	5,18	5,23	
20	2,44	3,08	3,46	3,74	3,95	4,12	4,27	4,40	4,51	4,61	4,70	4,78	4,85	4,92	4,99	5,05	5,10	5,16	5,20	
24	2,42	3,05	3,42	3,69	3,90	4,07	4,21	4,34	4,44	4,54	4,63	4,71	4,78	4,85	4,91	4,97	5,02	5,07	5,12	
30	2,40	3,02	3,39	3,65	3,85	4,02	4,16	4,28	4,38	4,47	4,56	4,64	4,71	4,77	4,83	4,89	4,94	4,99	5,03	
40	2,38	2,99	3,35	3,60	3,80	3,96	4,10	4,21	4,32	4,41	4,49	4,56	4,63	4,69	4,75	4,81	4,86	4,90	4,95	
60	2,36	2,96	3,31	3,56	3,75	3,91	4,04	4,16	4,25	4,34	4,42	4,49	4,56	4,62	4,67	4,73	4,78	4,82	4,86	
120	2,34	2,93	3,28	3,52	3,71	3,86	3,99	4,10	4,19	4,28	4,35	4,42	4,48	4,54	4,60	4,65	4,69	4,74	4,78	
∞	2,33	2,90	3,24	3,48	3,66	3,81	3,93	4,04	4,13	4,21	4,28	4,35	4,41	4,47	4,52	4,57	4,61	4,65	4,69	

TABELA A.4 – Valores de z para o nível de significância de 1% segundo o número de médias abrangidas pelo intervalo e os graus de liberdade do resíduo

G.L. do resíduo	Número de tratamentos (k)																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	90,03	
2	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	14,04	
3	8,261	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	8,321	
4	6,512	6,677	6,740	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	6,756	
5	5,702	5,893	5,989	6,040	6,065	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	6,074	
6	5,243	5,439	5,549	5,614	5,655	5,680	5,694	5,701	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	5,703	
7	4,949	5,145	5,260	5,334	5,383	5,416	5,439	5,454	5,464	5,470	5,472	5,472	5,472	5,472	5,472	5,472	5,472	5,472	5,472	
8	4,746	4,939	5,057	5,135	5,189	5,227	5,256	5,276	5,291	5,302	5,309	5,314	5,316	5,317	5,317	5,317	5,317	5,317	5,317	
9	4,596	4,787	4,906	4,986	5,043	5,086	5,118	5,142	5,160	5,174	5,185	5,193	5,199	5,203	5,205	5,206	5,206	5,206	5,206	
10	4,482	4,671	4,790	4,871	4,931	4,975	5,010	5,037	5,058	5,074	5,088	5,098	5,106	5,112	5,117	5,120	5,122	5,124	5,124	
11	4,392	4,579	4,697	4,780	4,841	4,887	4,924	4,952	4,975	4,994	5,009	5,021	5,031	5,039	5,045	5,050	5,054	5,057	5,059	
12	4,320	4,504	4,622	4,706	4,767	4,815	4,852	4,883	4,907	4,927	4,944	4,958	4,969	4,978	4,986	4,993	4,998	5,002	5,006	
13	4,260	4,442	4,560	4,644	4,706	4,755	4,793	4,824	4,850	4,872	4,889	4,904	4,917	4,928	4,937	4,944	4,950	4,956	4,960	
14	4,210	4,391	4,508	4,591	4,654	4,704	4,743	4,775	4,802	4,824	4,843	4,859	4,872	4,884	4,894	4,902	4,910	4,916	4,921	
15	4,168	4,347	4,463	4,547	4,610	4,660	4,700	4,733	4,760	4,783	4,803	4,820	4,834	4,846	4,857	4,866	4,874	4,881	4,887	
16	4,131	4,309	4,425	4,509	4,572	4,622	4,663	4,696	4,724	4,748	4,768	4,786	4,800	4,813	4,825	4,835	4,844	4,851	4,858	
17	4,099	4,275	4,391	4,475	4,539	4,589	4,630	4,664	4,693	4,717	4,738	4,756	4,771	4,785	4,797	4,807	4,816	4,824	4,832	
18	4,071	4,246	4,362	4,445	4,509	4,560	4,601	4,635	4,664	4,689	4,711	4,729	4,745	4,759	4,772	4,783	4,792	4,801	4,808	
19	4,046	4,220	4,335	4,419	4,483	4,534	4,575	4,610	4,639	4,665	4,686	4,705	4,722	4,736	4,749	4,761	4,771	4,780	4,788	
20	4,024	4,197	4,312	4,395	4,459	4,510	4,552	4,587	4,617	4,642	4,664	4,684	4,701	4,716	4,729	4,741	4,751	4,761	4,769	
24	3,956	4,126	4,239	4,322	4,386	4,437	4,480	4,516	4,546	4,573	4,596	4,616	4,634	4,651	4,665	4,678	4,690	4,700	4,710	
30	3,889	4,056	4,168	4,250	4,314	4,366	4,409	4,445	4,477	4,504	4,528	4,550	4,569	4,586	4,601	4,615	4,628	4,640	4,650	
40	3,825	3,988	4,098	4,180	4,244	4,296	4,339	4,376	4,408	4,436	4,461	4,483	4,503	4,521	4,537	4,553	4,566	4,579	4,591	
60	3,762	3,922	4,031	4,111	4,174	4,226	4,270	4,307	4,340	4,368	4,394	4,417	4,438	4,456	4,474	4,490	4,504	4,518	4,530	
120	3,702	3,858	3,965	4,044	4,107	4,158	4,202	4,239	4,272	4,301	4,327	4,351	4,372	4,392	4,410	4,426	4,442	4,456	4,469	
∞	3,643	3,796	3,900	3,978	4,040	4,091	4,135	4,172	4,205	4,235	4,261	4,285	4,307	4,327	4,345	4,363	4,379	4,394	4,408	

TABELA A.5 – Valores de z para o nível de significância de 5% segundo o número de médias abrangidas pelo intervalo e os graus de liberdade do resíduo

G.L. do resíduo	Número de tratamentos (k)																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	17,97	
2	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	6,085	
3	4,501	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	4,516	
4	3,927	4,013	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	4,033	
5	3,635	3,749	3,797	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	3,814	
6	3,461	3,587	3,649	3,680	3,694	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	3,697	
7	3,344	3,477	3,548	3,588	3,611	3,622	3,626	3,626	3,626	3,626	3,626	3,626	3,626	3,626	3,626	3,626	3,626	3,626	3,626	
8	3,261	3,399	3,475	3,521	3,549	3,566	3,575	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	3,579	
9	3,199	3,339	3,420	3,470	3,502	3,523	3,536	3,544	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	3,547	
10	3,151	3,293	3,376	3,430	3,465	3,489	3,505	3,516	3,522	3,525	3,526	3,526	3,526	3,526	3,526	3,526	3,526	3,526	3,526	
11	3,113	3,256	3,342	3,397	3,435	3,462	3,480	3,493	3,501	3,506	3,509	3,510	3,510	3,510	3,510	3,510	3,510	3,510	3,510	
12	3,082	3,225	3,313	3,370	3,410	3,439	3,459	3,474	3,484	3,491	3,496	3,498	3,499	3,499	3,499	3,499	3,499	3,499	3,499	
13	3,055	3,200	3,289	3,348	3,389	3,419	3,442	3,458	3,470	3,478	3,484	3,488	3,490	3,490	3,490	3,490	3,490	3,490	3,490	
14	3,033	3,178	3,268	3,329	3,372	3,403	3,426	3,444	3,457	3,467	3,474	3,479	3,482	3,484	3,484	3,485	3,485	3,485	3,485	
15	3,014	3,160	3,250	3,312	3,356	3,389	3,413	3,432	3,446	3,457	3,465	3,471	3,476	3,478	3,480	3,481	3,481	3,481	3,481	
16	2,998	3,144	3,235	3,298	3,343	3,376	3,402	3,422	3,437	3,449	3,458	3,465	3,470	3,473	3,477	3,478	3,478	3,478	3,478	
17	2,984	3,130	3,222	3,285	3,331	3,366	3,392	3,412	3,429	3,441	3,451	3,459	3,465	3,469	3,473	3,475	3,476	3,476	3,476	
18	2,971	3,118	3,210	3,274	3,321	3,356	3,383	3,405	3,421	3,435	3,445	3,454	3,460	3,465	3,470	3,472	3,474	3,474	3,474	
19	2,960	3,107	3,199	3,264	3,311	3,347	3,375	3,397	3,415	3,429	3,440	3,449	3,456	3,462	3,467	3,470	3,472	3,473	3,474	
20	2,950	3,097	3,190	3,255	3,303	3,339	3,368	3,391	3,409	3,424	3,436	3,445	3,453	3,459	3,464	3,467	3,470	3,472	3,473	
24	2,919	3,066	3,160	3,226	3,276	3,315	3,345	3,370	3,390	3,406	3,420	3,432	3,441	3,449	3,456	3,461	3,465	3,469	3,471	
30	2,888	3,035	3,131	3,199	3,250	3,290	3,322	3,349	3,371	3,389	3,405	3,418	3,430	3,439	3,447	3,454	3,460	3,466	3,470	
40	2,858	3,006	3,102	3,171	3,224	3,266	3,300	3,328	3,352	3,373	3,390	3,405	3,418	3,429	3,439	3,448	3,456	3,463	3,469	
60	2,829	2,976	3,073	3,143	3,198	3,241	3,277	3,307	3,333	3,355	3,374	3,391	3,406	3,419	3,431	3,442	3,451	3,460	3,467	
120	2,800	2,947	3,045	3,116	3,172	3,217	3,254	3,287	3,314	3,337	3,359	3,377	3,394	3,409	3,423	3,435	3,446	3,457	3,466	
∞	2,772	2,918	3,017	3,089	3,146	3,193	3,232	3,265	3,294	3,320	3,343	3,363	3,382	3,399	3,414	3,428	3,442	3,454	3,466	

TABELA A.6 – Valores de z para o nível de significância de 10% segundo o número de médias abrangidas pelo intervalo e os graus de liberdade do resíduo

G.L. do resíduo	Número de médias abrangidas pelo intervalo																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	8,929	
2	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	4,130	
3	3,328	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	3,330	
4	3,015	3,074	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	
5	2,850	2,934	2,964	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	2,970	
6	2,748	2,846	2,890	2,908	2,911	2,911	2,911	2,911	2,911	2,911	2,911	2,911	2,911	2,911	2,911	2,911	2,911	2,911	2,911	
7	2,680	2,785	2,838	2,864	2,876	2,878	2,878	2,878	2,878	2,878	2,878	2,878	2,878	2,878	2,878	2,878	2,878	2,878	2,878	
8	2,630	2,742	2,800	2,832	2,849	2,857	2,858	2,858	2,858	2,858	2,858	2,858	2,858	2,858	2,858	2,858	2,858	2,858	2,858	
9	2,592	2,708	2,771	2,808	2,829	2,840	2,845	2,847	2,847	2,847	2,847	2,847	2,847	2,847	2,847	2,847	2,847	2,847	2,847	
10	2,563	2,682	2,748	2,788	2,813	2,827	2,835	2,839	2,839	2,839	2,839	2,839	2,839	2,839	2,839	2,839	2,839	2,839	2,839	
11	2,540	2,660	2,730	2,772	2,799	2,817	2,827	2,833	2,835	2,835	2,835	2,835	2,835	2,835	2,835	2,835	2,835	2,835	2,835	
12	2,521	2,643	2,714	2,759	2,789	2,808	2,821	2,828	2,832	2,833	2,833	2,833	2,833	2,833	2,833	2,833	2,833	2,833	2,833	
13	2,505	2,628	2,701	2,748	2,779	2,800	2,815	2,824	2,829	2,832	2,832	2,832	2,832	2,832	2,832	2,832	2,832	2,832	2,832	
14	2,491	2,616	2,690	2,739	2,771	2,794	2,810	2,820	2,827	2,831	2,832	2,833	2,833	2,833	2,833	2,833	2,833	2,833	2,833	
15	2,479	2,605	2,681	2,731	2,765	2,789	2,805	2,817	2,825	2,830	2,833	2,834	2,834	2,834	2,834	2,834	2,834	2,834	2,834	
16	2,469	2,596	2,673	2,723	2,759	2,784	2,802	2,815	2,824	2,829	2,833	2,835	2,836	2,836	2,836	2,836	2,836	2,836	2,836	
17	2,460	2,588	2,665	2,717	2,753	2,780	2,798	2,812	2,822	2,829	2,834	2,836	2,838	2,838	2,838	2,838	2,838	2,838	2,838	
18	2,452	2,580	2,659	2,712	2,749	2,776	2,796	2,810	2,821	2,828	2,834	2,838	2,840	2,840	2,840	2,840	2,840	2,840	2,840	
19	2,445	2,574	2,653	2,707	2,745	2,773	2,793	2,808	2,820	2,828	2,834	2,839	2,841	2,842	2,843	2,843	2,843	2,843	2,843	
20	2,439	2,568	2,648	2,702	2,741	2,770	2,791	2,807	2,819	2,828	2,834	2,839	2,843	2,845	2,845	2,845	2,845	2,845	2,845	
24	2,420	2,550	2,632	2,688	2,729	2,760	2,783	2,801	2,816	2,827	2,835	2,842	2,848	2,851	2,854	2,856	2,857	2,857	2,857	
30	2,400	2,532	2,615	2,674	2,717	2,750	2,776	2,796	2,813	2,826	2,837	2,846	2,853	2,859	2,863	2,867	2,869	2,871	2,873	
40	2,381	2,514	2,600	2,660	2,705	2,741	2,769	2,791	2,810	2,825	2,838	2,849	2,858	2,866	2,873	2,878	2,883	2,887	2,890	
60	2,363	2,497	2,584	2,646	2,694	2,731	2,761	2,786	2,807	2,825	2,839	2,853	2,864	2,874	2,883	2,890	2,897	2,903	2,908	
120	2,344	2,479	2,568	2,632	2,682	2,722	2,754	2,781	2,804	2,824	2,842	2,857	2,871	2,883	2,893	2,903	2,912	2,920	2,928	
∞	2,326	2,462	2,552	2,619	2,670	2,712	2,746	2,776	2,801	2,824	2,844	2,861	2,877	2,892	2,905	2,918	2,929	2,939	2,949	

TABELA A.7 – Valores de d para o nível de significância de 1% segundo o número de grupos tratados e os graus de liberdade do resíduo

G.L. do resíduo	Número de grupos tratados													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20
5	4,03	4,69	4,98	5,22	5,41	5,56	5,68	5,80	5,80	5,98	6,05	6,12	6,30	6,52
6	3,71	4,21	4,51	4,71	4,87	5,00	5,10	5,20	5,28	5,35	5,41	5,47	5,62	5,81
7	3,50	3,95	4,21	4,39	4,83	4,64	4,74	4,82	4,89	4,95	5,01	5,06	5,19	5,36
8	3,36	3,77	4,00	4,17	4,29	4,40	4,48	4,56	4,62	4,68	4,73	4,78	4,90	5,05
9	3,25	3,63	3,85	4,01	4,12	4,22	4,30	4,37	4,43	4,48	4,53	4,57	4,68	4,82
10	3,17	3,53	3,74	3,88	3,99	4,08	4,16	4,22	4,28	4,33	4,37	4,42	4,52	4,65
11	3,11	3,45	3,65	3,79	3,89	3,98	4,05	4,11	4,16	4,21	4,25	4,29	4,39	4,52
12	3,05	3,39	3,58	3,71	3,81	3,89	3,96	4,02	4,07	4,12	4,16	4,19	4,29	4,41
13	3,01	3,33	3,52	3,65	3,74	3,82	3,89	3,94	3,99	4,04	4,08	4,11	4,20	4,32
14	2,98	3,29	3,47	3,59	3,69	3,76	3,83	3,88	3,93	3,97	4,01	4,05	4,13	4,24
15	2,95	3,25	3,43	3,55	3,64	3,71	3,78	3,83	3,88	3,92	3,95	3,99	4,07	4,18
16	2,92	3,22	3,39	3,51	3,60	3,67	3,73	3,78	3,83	3,87	3,91	3,94	4,02	4,13
17	2,90	3,19	3,36	3,47	3,56	3,63	3,69	3,74	3,79	3,83	3,86	3,90	3,98	4,08
18	2,88	3,17	3,33	3,44	3,53	3,60	3,66	3,71	3,75	3,79	3,83	3,86	3,94	4,04
19	2,86	3,15	3,31	3,42	3,50	3,57	3,63	3,68	3,72	3,76	3,79	3,83	3,90	4,00
20	2,85	3,13	3,29	3,40	3,48	3,55	3,60	3,65	3,69	3,73	3,77	3,80	3,87	3,97
24	2,80	3,07	3,22	3,32	3,40	3,47	3,52	3,57	3,61	3,64	3,68	3,70	3,78	3,87
30	2,75	3,01	3,15	3,25	3,33	3,39	3,44	3,49	3,52	3,56	3,59	3,62	3,69	3,78
40	2,70	2,95	3,09	3,19	3,26	3,32	3,37	3,41	3,44	3,48	3,51	3,53	3,60	3,68
60	2,66	2,90	3,03	3,12	3,19	3,25	3,29	3,33	3,37	3,40	3,42	3,45	3,51	3,59
120	2,62	2,85	2,97	3,06	3,12	3,18	3,22	3,26	3,29	3,32	3,35	3,37	3,43	3,51
∞	2,58	2,79	2,92	3,00	3,06	3,11	3,15	3,19	3,22	3,25	3,27	3,29	3,35	3,42

TABELA A.8 – Valores de d para o nível de significância de 5% segundo o número de grupos tratados e os graus de liberdade do resíduo

Gt do resíduo	Número de grupos tratados													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20
5	2,57	3,03	3,29	3,48	3,62	3,73	3,82	3,90	3,97	4,03	4,09	4,14	4,26	4,42
6	2,45	2,86	3,10	3,26	3,39	3,49	3,57	3,64	3,71	3,76	3,81	3,86	3,97	4,11
7	2,36	2,75	2,97	3,12	3,24	3,33	3,41	3,47	3,53	3,58	3,63	3,67	3,78	3,91
8	2,31	2,67	2,88	3,02	3,13	3,22	3,29	3,35	3,41	3,46	3,50	3,54	3,64	3,76
9	2,26	2,61	2,81	2,95	3,05	3,14	3,20	3,26	3,32	3,36	3,40	3,44	3,53	3,65
10	2,23	2,57	2,76	2,89	2,99	3,07	3,14	3,19	3,24	3,29	3,33	3,36	3,45	3,57
11	2,20	2,53	2,72	2,84	2,94	3,02	3,08	3,14	3,19	3,23	3,27	3,30	3,39	3,50
12	2,18	2,50	2,68	2,81	2,90	2,98	3,04	3,09	3,14	3,18	3,22	3,25	3,34	3,45
13	2,16	2,48	2,65	2,78	2,87	2,94	3,00	3,06	3,10	3,14	3,18	3,21	3,29	3,40
14	2,14	2,46	2,63	2,75	2,84	2,91	2,97	3,02	3,07	3,11	3,14	3,18	3,26	3,36
15	2,13	2,44	2,61	2,73	2,82	2,89	2,95	3,00	3,04	3,08	3,12	3,15	3,23	3,33
16	2,12	2,42	2,59	2,71	2,80	2,87	2,92	2,97	3,02	3,06	3,09	3,12	3,20	3,30
17	2,11	2,41	2,58	2,69	2,78	2,85	2,90	2,95	3,00	3,03	3,07	3,10	3,18	3,27
18	2,10	2,40	2,56	2,68	2,76	2,83	2,89	2,94	2,98	3,01	3,05	3,08	3,16	3,25
19	2,09	2,39	2,55	2,66	2,75	2,81	2,87	2,92	2,96	3,00	3,03	3,06	3,14	3,23
20	2,09	2,38	2,54	2,65	2,73	2,80	2,86	2,90	2,95	2,98	3,02	3,05	3,12	3,22
24	2,06	2,35	2,51	2,61	2,70	2,76	2,81	2,86	2,90	2,94	2,97	3,00	3,07	3,16
30	2,04	2,32	2,47	2,58	2,66	2,72	2,77	2,82	2,86	2,89	2,92	2,95	3,02	3,11
40	2,02	2,29	2,44	2,54	2,62	2,68	2,73	2,77	2,81	2,85	2,87	2,90	2,97	3,06
60	2,00	2,27	2,41	2,51	2,58	2,64	2,69	2,73	2,77	2,80	2,83	2,86	2,92	3,00
120	1,98	2,24	2,38	2,47	2,55	2,60	2,65	2,69	2,73	2,76	2,79	2,81	2,87	2,95
∞	1,96	2,21	2,35	2,44	2,51	2,57	2,61	2,65	2,69	2,72	2,72	2,77	2,83	2,91

