

7. DERIVADAS DIRECIONAIS E GRADIENTES

As derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ de uma função $z = f(x, y)$ representam a taxa de variação dessa função nas direções paralelas aos eixos x e y .

Podemos encontrar a taxa de variação em **qualquer direção**, mas para tanto teremos que utilizar um **vetor direção**. Considerando $z = f(x, y)$ e $u = u_1 i + u_2 j$ um vetor unitário que tem ponto inicial em (x_0, y_0) e aponta na direção desejada. Este vetor determina uma reta, expressa parametricamente como $(x + su_1, y + su_2)$. A taxa média de variação de f na direção do vetor $u = (u_1, u_2)$ entre os pontos (x, y) e $(x + su_1, y + su_2)$ é dada por

$$\frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s}.$$

A **derivada direcional** de f em (x, y) na direção de u é dada por

$$D_u f(x, y) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s},$$

desde que o limite exista.

NOTAÇÃO: $D_u f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial u}(x, y)$.

Observação 7.

Teorema 6. Se $z = f(x, y)$ é uma função diferenciável e se $u = (u_1, u_2)$ é um vetor unitário, então

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)u_1 + f_y(x, y)u_2.$$

Observação 8.

Exemplo 43. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = 3x^2y$ no ponto $(1, 2)$ na direção do vetor $u = 3i + 4j$.

Exemplo 44. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = e^{xy}$ em $(-2, 0)$ na direção do vetor unitário que faz um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com o eixo x positivo.

GRADIENTE

A derivada direcional de f

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)u_1 + f_y(x, y)u_2$$

pode ser expressa na forma de um produto escalar como

$$D_u f(x, y) = (f_x(x, y)i + f_y(x, y)j)(u_1i + u_2j).$$

O primeiro vetor no produto escalar é chamado gradiente de f e o segundo vetor é o vetor u .

Definição 9. Seja $z = f(x, y)$. O **gradiente** de f é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j.$$

NOTAÇÃO: ∇f , ∇z , $grad f$.

Com esta notação, a derivada direcional de f pode ser expressa por

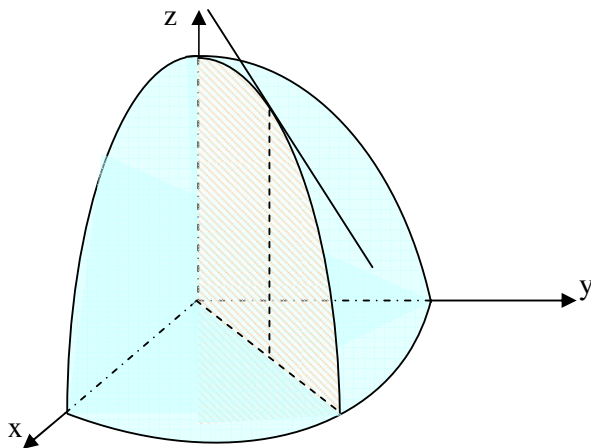
$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u.$$

O símbolo ∇ (leia-se “del”) é um delta invertido e é também chamado de “nabla”.

Exemplo 45. Seja $f(x, y) = x^2 - 4xy$.

- Ache o gradiente de f no ponto $(1,2)$.
- Use o gradiente para achar a derivada direcional de f na direção do vetor $a = (2,5)$ no ponto $(1,2)$.
- Ache a derivada direcional de f na direção do vetor gradiente no ponto $(1,2)$.

PROPRIEDADES DO GRADIENTE



Teorema 7. Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em (x, y) . Temos:

- a) Se $\nabla f(x, y) = 0$, então $D_u f(x, y) = 0$ para qualquer ponto (x, y) .
- b) Se $\nabla f(x, y) \neq 0$, então o máximo da taxa de crescimento de f em (x, y) ocorre na direção de $\nabla f(x, y)$. O valor máximo de $D_u f(x, y)$ é $\|\nabla f(x, y)\|$.
- c) Se $\nabla f(x, y) \neq 0$, então o mínimo da taxa de acréscimo (ou o máximo da taxa de decréscimo) de f em (x, y) ocorre na direção de $-\nabla f(x, y)$. O valor máximo de $D_u f(x, y)$ é $-\|\nabla f(x, y)\|$.

Exemplo 46. A temperatura (em $^{\circ}\text{C}$) na superfície de uma placa metálica é dada por $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$, com x e y dados em cm .

Em que direção a temperatura cresce mais rapidamente no ponto $(2, -3)$? Qual a taxa de crescimento?

Teorema 8. Se $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto e $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) \in A$ para todo $t \in I$. Assim se γ for diferenciável em t_0 e $f(x_0, y_0) = f(\gamma(t_0))$ então $F(t) = f(\gamma(t))$ é diferenciável em t_0 e vale a regra da cadeia:

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$$

Teorema 9. Se f for diferenciável em (x_0, y_0) e se $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é normal a curva de nível de f pelo ponto (x_0, y_0) .

Exemplo 47. Esboce a curva de nível da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ que passa por $(3, 4)$ e desenhe o vetor gradiente nesse ponto.

Exercícios 3-36 (ímpares), 40, 41, 43, 47, 49, 52, 57, 58