DETERMINAÇÃO DO VOLUME DO CILINDRO HORIZONTAL – SOLUÇÃO PERTINETE PARA UM TRABALHADOR COM FORMAÇÃO BÁSICA

Marcos Pinheiro de Lima[1],
Instituto Federal do Rio Grande do Sul-Campus Bento Gonçalves,
marcos.lima@bento.ifrs.edu.br

Rodrigo Zanette[1],
Instituto Federal do Rio Grande do Sul-Campus Bento Gonçalves,
rodrigo.zanette@bento.ifrs.edu.br

Prof. Me. Delair Bavaresco,
Instituto Federal do Rio Grande do Sul-Campus Bento Gonçalves,
delair@bento.ifrs.edu.br

Resumo
Este trabalho aborda a determinação do volume de um cilindro horizontal (sem qualquer inclinação), utilizando-se apenas um bastão para medição e conhecimentos matemáticos de nível básico. O problema se evidencia quando um trabalhador de uma empresa de transporte buscou ajuda aos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Bento Gonçalves para a determinação do volume de um tanque de combustível, parcialmente preenchido até determinada altura a partir da posição horizontal. Na busca desta solução, partiu-se de conhecimentos mais complexos (Cálculo Newtoniano), porém, levando em consideração o nível de conhecimento deste trabalhador, buscou-se uma nova alternativa de solução. Esta alternativa se deu através de estudos bibliográficos e recursos tecnológicos, de modo que este trabalhador compreendesse todo o processo de construção e não apenas o repasse de dados. Após obtenção da solução foi construída uma tabela, que pode gerar o desenvolvimento de uma régua de determinação volumétrica para auxiliá-lo no seu trabalho.

Palavras-chave: Geometria Espacial; Volumes; Aplicações.

1. Evidenciando a problemática

Desde a Grécia Antiga, a humanidade depara-se com problemas que expressivamente envolvem conhecimentos matemáticos aplicados ás mais diversas áreas de aplicação e conhecimento. A partir desses estudos aplicados, surgem às contribuições para o desenvolvimento e evolução do conhecimento matemático, bem como de sua gama de aplicações. Exemplo disso, foram os três problemas clássicos da matemática antiga que caracterizaram a chamada Idade Heroica em meados de 400 a.C.. Os problemas citados são denominador como o problema da Duplicação do Cubo, da

---
[1] Bolsistas do Programa de Educação Tutorial – PET Matemática.

Trissecção do Ângulo e da Quadratura do Círculo, os quais foram atacados pelos principais personagens da época dispondo apenas de equipamentos bastante limitados, como régua não milimetrada e compasso para resolvê-los. Na tentativa de resolução destes problemas (mais tarde provada a impossibilidade de solução com esses equipamentos), muitos avanços se evidenciaram, permitindo aplicações em diversas outras frentes do conhecimento (BOYER, 2003).

Baseando nesta perspectiva, apresentamos a discussão de um problema evidenciado por profissionais da área de transporte e abastecimento em suas atividades cotidianas. Trata-se de calcular o volume de um tanque de combustível de formato cilíndrico, disposto na posição horizontal (sem qualquer inclinação) conforme Figura 1, utilizando-se apenas um bastão para medição da altura ocupada pelo líquido a partir de uma abertura na parte superior.

FIGURA 1: Imagem de um tanque de combustível
Fonte: www.fazforte.com.br

O problema surge quando um trabalhador de uma empresa de transporte buscou ajuda aos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Bento Gonçalves. Este trabalhador, por ser responsável pelo controle de combustível no reservatório de uma indústria, em suas atividades de rotina, necessitava determinar o volume do tanque no formato cilíndrico, em determinado dia de cada mês para viabilizar o pedido de compra de combustível, de modo que o pedido não ultrapassasse a capacidade do tanque, sendo que para isso, deveria verificar a quantidade disponível no tanque. Para cumprir com suas obrigações, utilizava conhecimentos empíricos a partir de experiências acumuladas ("olhômetro"), baseando-se na altura que o combustível acusava num bastão de madeira, sem escala graduada de indicação do volume.

A partir dessa situação problema, buscou-se explorar alguns conhecimentos formais adquiridos na formação básica e produzir através destes, uma metodologia simples e didática de compreensão e aplicação acessível ao trabalhador. Este referido problema pode ser tratado com conhecimentos de cálculo euclidiano ao nível de ensino superior, porém geralmente inacessíveis a tais trabalhadores.

Um estudo semelhante com várias metodologias de determinação de volume de um recipiente foi realizado por Rempel, Ferrari e Tondelo (2003), no qual determinam o volume de um vidro de conservas de pepinos. O referido estudo objetivava relacionar a realidade dos alunos com conhecimentos de matemática de vários níveis e também incluindo parte experimental, despertando neles curiosidade crítica sobre tudo o que os cerca.

Nesta mesma linha de pesquisa Kaufmann, Ghisleni e Padilha (2003) abordam a determinação do volume de água comportado por forminhas de gelo. Segundo os autores

> O tema forminhas de gelo surgiu devido a importância para os educandos, uma vez que todas as embalagens estão presentes em seu dia a dia. Já na escola, o tema pode ser explorado com enfoque mais educativo, possibilitando explorar as prévias informações de forma mais elaborada e sistematizada, em estreita ligação com os conteúdos matemáticos ali estudados. Outro sim é possível explorar vários conteúdos exclusivamente matemáticos a partir do tema aqui abordado como, por exemplos geometria espacial (volume e área) e integrais. (KAUFMANN; GHISLENI; PADILHA, 2003, p. 5.)

Ainda nesse contexto, nos referimos aos estudos de Espostes, Endo e Anflor (2011), que abordam a determinação do volume de uma garrafa empregando o método de Lagrange. Nessa abordagem os autores utilizam integração numérica, desenho industrial, programação, comparando os resultados numéricos com resultados experimentais.

Diante disso, o objetivo desse trabalho, trata da obtenção de um modelo que permita determinar o volume do cilindro a partir da marcação em um bastão inserido no líquido, para viabilizar a quantidade necessária de compra e controle de combustível e que seja possível de compreensão para trabalhadores com formação de nível médio.

2. Forma tradicional de determinação do volume de um cilindro

A determinação clássica do volume de um cilindro é dada pela multiplicação da área da base pela altura do cilindro. No caso do volume de um líquido ocupando parcialmente a capacidade de um recipiente cilíndrico disposto na posição vertical, conforme Figura 2, a determinação do volume se dá pelo produto entre a área da base pela altura ocupada pelo líquido. Para o caso de um cilindro disposto na posição horizontal, não totalmente preenchido, a área da base não se trata de um círculo, exigindo uma abordagem diferenciada.

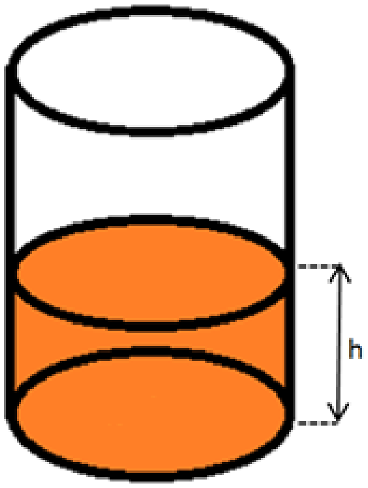

FIGURA 2: Esquema do cilindro parcialmente preenchido disposto na posição vertical.

Abordamos a seguir, o caso em que o cilindro está na posição horizontal parcialmente preenchido. Nesse caso o objetivo principal é determinar a área da base, que se trata de uma porção circular, em função da altura *h* conforme Figura 3.

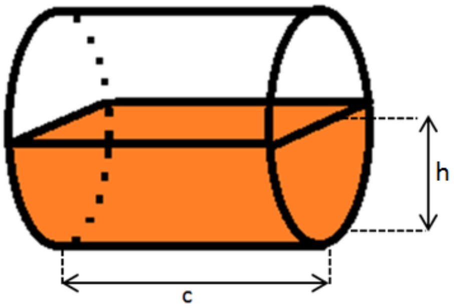

FIGURA 3: Esquema do cilindro na posição horizontal.

3. Obtenção da fórmula geral a partir do Cálculo Newtoniano

A primeira investida na busca pela solução do problema em questão foi através da utilização da integral definida da curva formada pela altura do liquido em relação à posição horizontal no cilindro, a fim de obter a área da porção circular formada pelo cilindro. Esse desenvolvimento é baseado a partir da Figura 4, onde *h* é a altura do líquido do cilindro na posição vertical.

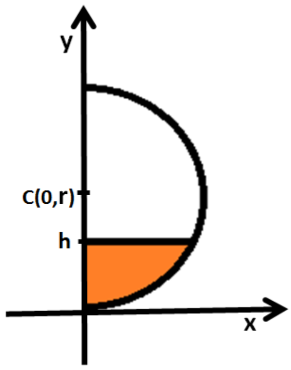

FIGURA 4: Esquema da porção circular no Plano Cartesiano.

Tomando a equação geral da circunferência, com centro no ponto $C(x_c, y_c)$ e raio *r*, dada por

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

e tomando $x_c = 0$ e $y_c = r$, obtemos

$$x = \sqrt{r^2 - (y - r)^2}\,,$$

de modo que a área destacada na Figura 3, pode ser obtida a partir da integral definida dada por

$$\int_0^h \sqrt{r^2-(y-r)^2}\,dy\,,$$

de onde, obtemos para a área desejada multiplicando-se por dois, a expressão dada por:

$$S=\left|(h-r)\sqrt{r^2-(h-r)^2}+r^2\left(arcsen\left(\frac{h-r}{r}\right)-\frac{3\pi}{2}\right)\right| \tag{1}$$

Finalmente o volume, é dado pela multiplicação da expressão (1) pelo comprimento do cilindro (c), ou seja:

$$V=\left|(h-r)\sqrt{r^2-(h-r)^2}+r^2\left(arcsen\left(\frac{h-r}{r}\right)+\frac{\pi}{2}\right)\right|\times c \tag{2}$$

A simulação numérica da variação do volume em função da altura é apresentada na Seção 5, porém, como o objetivo deste trabalho é obter uma solução possível de compreensão à trabalhadores com formação básica, apresentamos a seguir a obtenção da solução por meio da geometria euclidiana e da trigonometria.

4. Obtenção da solução a partir da Geometria Euclidiana

Considerando a questão de trabalho e o nível de conhecimento necessário para compreensão do processo de resolução através do Cálculo Newtoniano, entendemos que esta prática não seria acessível para a maioria, ou até mesmo a totalidade de trabalhador dos setores de transporte e abastecimento. Portanto, partimos de algumas definições mais básicas, ou seja, foi necessário adaptar a metodologia de modo que se tornasse acessível aos atores desse processo. Processo este que Chevallard (1991) conceitua-o como Transposição Didática, como segue:

> [...]um conteúdo de saber que é designado como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os <u>objetos de ensino</u>. O “trabalho” que transforma um saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado <u>transposição didática</u> (CHEVALLARD, 1991, p. 45 apud MOREIRA; DAVID, 2007, p.17).

A metodologia de cálculo será a mesma utilizada para o cilindro na posição vertical, ou seja, a multiplicação entre a área da base, neste caso a porção circular, pela altura, nesse caso comprimento do tanque. Partimos da ideia de uma secção transversal do cilindro, visualizamos uma circunferência, como ilustrado abaixo na Figura 4. A partir desse esquema, utilizamos as informações possíveis de mensuração, ou seja, o raio do cilindro (r) e altura do liquido (h). Com base no esquema da Figura 5, podemos determinar a área ocupada pelo liquido em função da altura h, subtraindo a área do setor circular ACB da área do triângulo AHC.

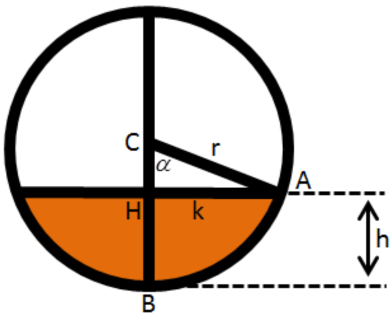

FIGURA 5: Seção transversal para determinação da área desejada.

Para o desenvolvimento, tomamos a relação

$$l = r \times \alpha \tag{3}$$

onde, l é o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ e α o ângulo $A\hat{C}B$ e

$$cos\,\alpha = \frac{r-h}{r},$$

obtemos para α ,

$$\alpha = arc\,cos\left(1 - \frac{h}{r}\right). \tag{4}$$

Tomando a área do setor circular dada por

$$S_{cc} = \frac{r \times l}{2}$$

e reescrevendo com as equações (3) e (4), obtemos

$$S_{cc} = \frac{r^2}{2} \times arccos\left(1 - \frac{h}{r}\right) \tag{5}$$

Para a área do triângulo AHC, tomamos

$$S_t = \frac{k \times (r-h)}{2}$$

onde k, pode ser obtida em função de r e h pelo teorema de Pitágoras, ou seja.

$$k = \sqrt{2hr - h^2}\ ,$$

de onde resulta

$$S_t = \frac{\sqrt{2hr - h^2} \times (r-h)}{2} \tag{6}$$

Enfim, obtermos a área desejada, subtraímos a equação (5) da (6), multiplicando este por 2, pois a área encontrada é a metade da necessária, ou seja:

$$S_B = r^2 \times arc\,cos\left(1 - \frac{h}{r}\right) - \sqrt{2hr - h^2} \times (r-h) \tag{7}$$

Obtida a equação para área da porção circular, obtemos a expressão para o volume desejado, ou seja:

$$V_C = \left[r^2 \times arc\,cos\left(1 - \frac{h}{r}\right) - \sqrt{2hr - h^2} \times (r-h) \right] \times c \tag{8}$$

A simulação numérica da variação do volume em relação à altura é apresentada na próxima seção.

5. Simulação numérica e construção de uma tabela volume x altura

A simulação numérica foi elaborada a partir de parâmetros identificados por meio de medições efetuadas no tanque de combustível ao qual o referido trabalhador estava envolvido. Foi utilizada uma fita métrica, sendo que a determinação do raio se deu por meio do diâmetro externo do tanque, ou seja, espera-se uma pequena discrepância para mais, entre o volume total do tanque e o volume máximo obtido nesta simulação, uma vez que o volume total é conhecido. Para o comprimento do tanque, foi obtido $c = 4{,}86m$ e para o raio $r = 0{,}89m$, sabendo-se que a capacidade total do tanque é de 12 mil litros.

A Figura 6 ilustra o gráfico da relação Volume x Altura. Observa-se que para $h = 2r$, ou seja, a capacidade máxima do tanque, o volume ultrapassa $12m^3$, como já era esperado.

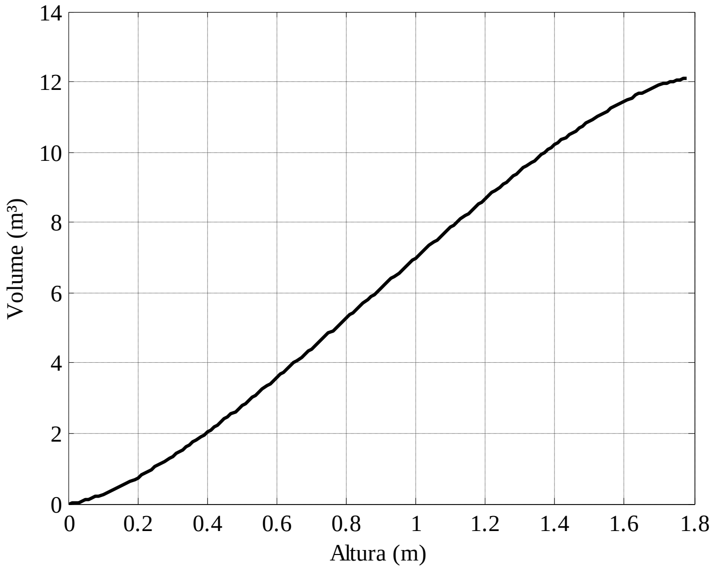

FIGURA 6: Relação altura x volume

Esse resultado permite determinar o volume de combustível dentro do tanque baseando-se apenas na altura do liquido a partir da expressão obtida.

Tomando $V_c = 12m^3$ na Equação (8) com $c = 4{,}86m$, foi possível determinar o raio exato do tanque de combustível, ou seja, $r = 0{,}8865m$. A simulação numérica com esse valor para o raio é apresentada na Figura 7.

A partir desses resultados, foi construída uma tabela volumétrica com as respectivas alturas e volumes, a fim de averiguar o volume atual, possibilitando assim uma maneira precisa de controle e de pedidos de compra. Segue a tabela:

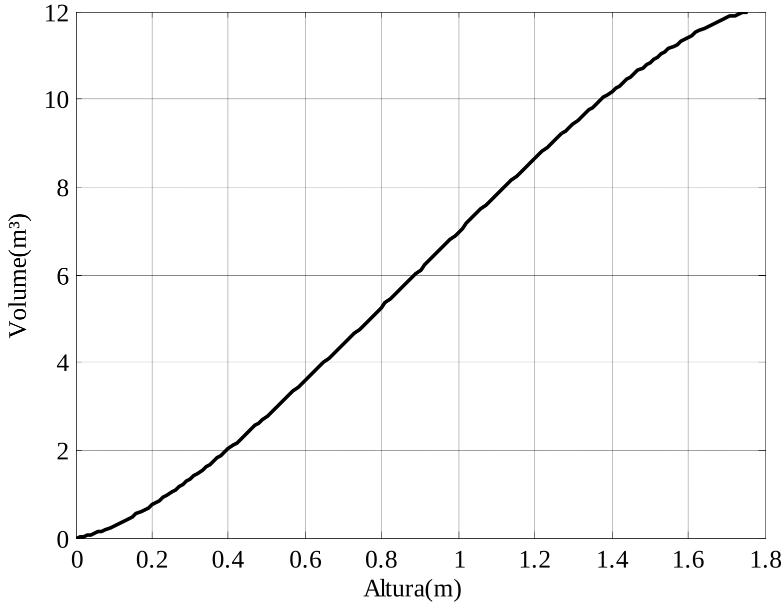

FIGURA 7: Volume x Altura – Gráfico construído no Scilab.

Tabela 1: Tabela Volumétrica.

Altura (metros)	Volume (Litros)
0.152	500
0.244	1.000
0.323	1.500
0.395	2.000
0.463	2.500
0.527	3.000
0.590	3.500
0.650	4.000
0.710	4.500
0.768	5.000
0.827	5.500
0.885	6.000
0.942	6.500
1.000	7.000
1.059	7.500
1.118	8.000
1.179	8.500
1.241	9.000
1.305	9.500
1.372	10.000
1.443	10.500
1.520	11.000
1.609	11.500
1.731	12.000

6. Considerações finais

Considerando a situação no qual o trabalhador se encontrava e o problema aplicado, esta pesquisa gerou grande discussão por parte dos envolvidos, nas questões que envolviam a Matemática estudada no ensino superior e na escola básica, assunto que alavancou a pesquisa. A primeira impressão sobre este trabalho foi de que a única solução para este problema seria apenas utilizando conhecimentos como o Cálculo, solução esta de grande prestígio, pela sua possibilidade de aplicação em conteúdos na disciplina de Cálculo. Partindo deste pressuposto, realizou-se um estudo na busca de uma facilitação de transpor o conhecimento, ou seja, transmitir algo compreensível e torná-lo acessível, para qualquer pessoa que obtêm algum nível de escolaridade. O resultado obtido evidencia que é possível desenvolver cálculos utilizando diversas metodologias, mas que ainda podem estar distantes da matemática não formal utilizada por trabalhadores em suas atividades habituais.

Numa avaliação técnica sobre os resultados obtidos, a partir dos dados coletados pelo trabalhador, constatamos que o volume máximo do reservatório é aproximadamente 12.094 litros, porém a capacidade total do mesmo é 12.000 litros. Este erro ocorreu pela imprecisão das medidas coletadas. Isto pode verificar-se pela diferenciação do volume perante a variação entre o comprimento do tanque com relação à variação do raio. Por exemplo: diminuir o raio 0.3 cm, teremos uma diferença de 81.5 litros, porém ao diminuir o comprimento em 3.5 cm, haverá uma redução de 87.2 litros. Então, analisando destes dados, pode-se constatar a margem de erro do acontecido, isto se deve pela imprecisão dos dados coletados, como o comprimento, que provavelmente tenha sido insignificante a diferença no volume, e o raio, que talvez tenha sido o grande diferencial no cálculo do volume, como citado acima, sua pequena diferença ocorreu uma grande variação no volume.

Estudos posteriores serão enfocados na direção da determinação do volume de um tanque com base elíptica, volume de um barril parabólico e volume de um tanque no formato de um cilindro reto, porém disposto na posição inclinado.

Referências

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** 2. ed. Revista por Uta C. Merzbach. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

CHEVALLARD, Yves. **La Transposicion Didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

ESPOSTE, Arthur de M.; ENDO, Fábio P.; ANFLOR Carla T. **Determinando o volume para envase de garrafas empregando o método de Lagrange.** III Encontro de Ciência e Tecnologia, 5 a 8 de outubro de 2011. Disponível em: http://observatorioderesiduos.com.br/ wp-content/uploads/2012/01/ANAIS_IIIECT3.pdf Acesso em: 12 de jul. 2012.

KAUFMANN, Monique C; GHISLENI, Cristiane B.; PADILHA, Iara. **Forminhas de Gelo.** Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/modelagem/forminhas/index.html. Acesso em: 13 de jul. 2012.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M.M.M.S. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. Coleção Tendências em Educação Matemática. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

REMPEL, Graciele; FERRARI, Luzimara; MARLOVA, Tondelo. **A Matemática na Conserva de Pepinos.** Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/ modelagem/vidro/index.html. Acesso em: 11 de jul. 2012.