

ISSN 2316-7785

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS: UM ESTUDO DE CASO ENVOLVENDO ALUNOS DO 7º ANO

Nadir dos Santos da Rosa
Universidade Federal do Pampa- Unipampa Campus Itaqui/RS
dryx-hgt@hotmail.com

Ronaldo Silva de Oliveira
Universidade Federal do Pampa- Unipampa Campus Itaqui/RS
ronaldo_ns_12@hotmail.com

Verônica Pereira Stivanin
Universidade Federal do Pampa- Unipampa Campus Itaqui/RS
veronicastivanin@bol.com.br

Denise Cardoso Bortolotto
Colégio Estadual São Patrício
uabdenise@gmail.com

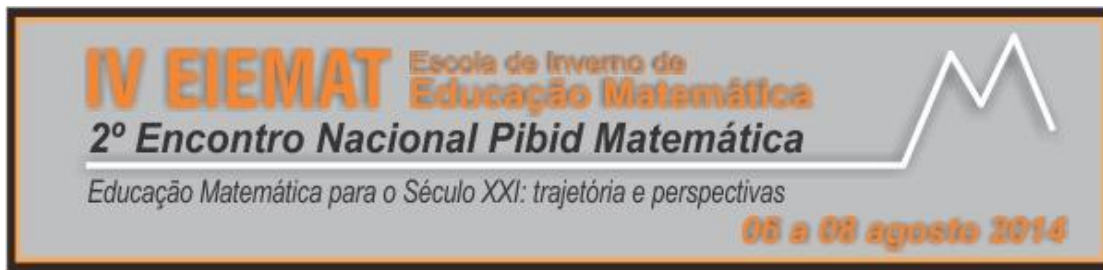
José Darci Benites Goulart
Colégio Estadual São Patrício
profjoseg@bol.com.br

LeugimCortezeRomio
Universidade Federal do Pampa- Unipampa Campus Itaqui/RS
leugimcr@gmail.com

Maria Arlita da Silveira Soares
Universidade Federal do Pampa- Unipampa Campus Itaqui/RS
arlitasoares@gmail.com

Resumo

Este trabalho objetivou investigar os conhecimentos mobilizados por um grupo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de Itaqui/RS ao resolverem atividades envolvendo operação de multiplicação de números inteiros, bem como, verificar possibilidades de intervenção didático-pedagógica a partir dos resultados de pesquisa da Educação Matemática. Para tanto, buscamos fundamentação teórica, principalmente, nas ideias de Caraça e Moretti e nas orientações curriculares nacionais e adotamos pressupostos da pesquisa qualitativa tomando como



fonte de produção de dados os protocolos de 53 alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, o livro didático escolhido pela escola e resultados de pesquisas sobre ensino de operação de multiplicação de números inteiros. A análise dos dados permitiu concluir que os alunos resolveram a atividade proposta por meio da mobilização das regras dos sinais, ou seja, não verificaram a regularidade apresentada na representação tabular. Ficou explícito, também, a ênfase para o uso de regras na proposta do livro didático.

Palavras-chave: Operação de Multiplicação; Números Inteiros; Regra dos Sinais.

Introdução

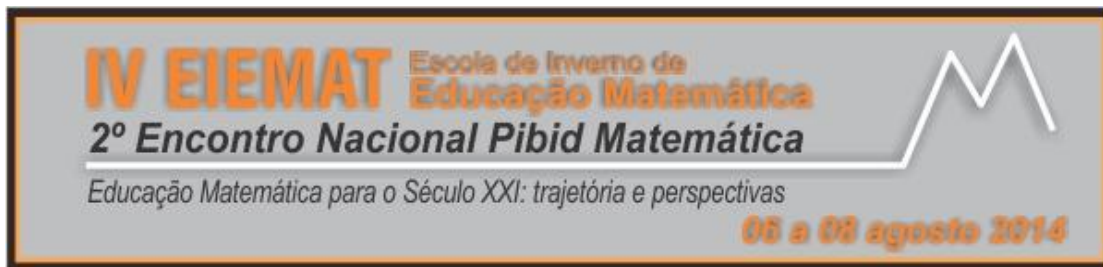
A importância dos números inteiros negativos pode ser verificada tanto no aspecto prático (dívidas, temperatura, elevação) quanto no aspecto puramente matemático (tornar a operação de subtração sempre possível). Entretanto, a história da Matemática mostra que sua aceitação demorou bastante tempo. Apenas no século XIX “os negativos foram interpretados como uma ampliação dos naturais e incorporam as leis da Aritmética. Passaram então a integrar a hierarquia dos sistemas numéricos como números inteiros” (BRASIL, 1998, p. 97).

Na escola, o estudo dos números inteiros negativos é cercado por vários obstáculos, por exemplo, “conferir significado às quantidades negativas; [...] perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais” (BRASIL, 1998, p.98), atribuir significado para as regras de sinais, em especial, para as operações de multiplicação e divisão.

O estudo formal dos números negativos, no Brasil, ocorre no 7º ano e, geralmente, dá-se muita ênfase a memorização de regras para efetuar tratamentos numéricos e a resolução de situações descontextualizadas. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais- PCN (1998, p.98):

Uma decorrência dessa abordagem é que muitos alunos não chegam a reconhecer os inteiros como extensão dos naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não as conseguem aplicar adequadamente, por não terem desenvolvido uma maior compreensão do que seja o número inteiro.

Por outro lado, é preciso cuidar para não realizar uma interpretação equivocada do termo contextualização sugerido pelas propostas curriculares oficiais, ou seja, realizar o



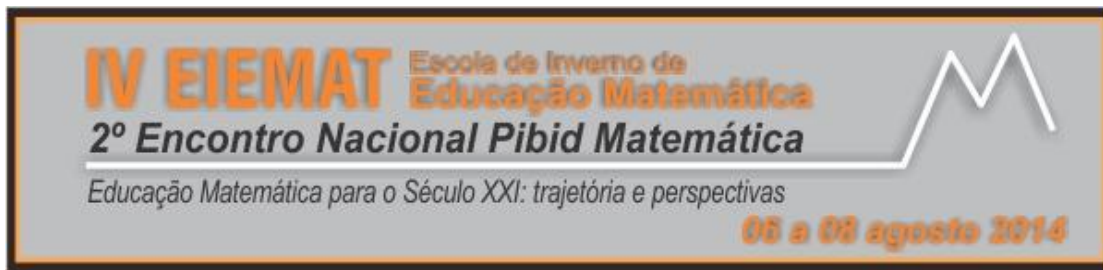
estudo dos números negativos por meio de situações ditas cotidianas. Conforme Lins e Gimenes (1997 apud PONTE, 2011, p.20) “os números negativos presentes nas situações cotidianas não são os mesmos utilizados na escola”. Costuma-se utilizar situações envolvendo dívidas para produzir significados, mas com certeza torna-se difícil produzir significados para a operação de multiplicar (-4) por (-6) neste contexto. Ainda, conforme os autores citados acima, mencionados por Ponte (2011, p. 20):

O problema da multiplicação de números negativos só foi resolvido quando os matemáticos assumiram, definitivamente, que não existe significado na rua para essa operação e começaram a procurar [...] “um significado produzido com base nos princípios que permitem, na matemática acadêmica, a existência daquelas estranhas coisas, quantidades que são menos do que nada.” (p.20)

Conforme Moretti (2012) se do ponto de vista estritamente matemático o resultado de “ $(-)\times(-)=(+)$ ” não causa nenhuma dificuldade ou estranheza, do ponto de vista didático-pedagógico esta questão, ainda, precisa ser analisada, pois muitos alunos, ao longo da Educação Básica e também do Ensino Superior, apresentam inúmeras dificuldades no estudo dos números inteiros negativos; impulsionando professores e pesquisadores a buscarem explicações e a procurarem outros modelos para ensiná-los (HILLESHEIN, MORETTI, 2013).

Considerando que somos integrantes do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência- PIBID, que foi implantado no ano de 2014 na Universidade Federal do Pampa –Unipampa – Campus Itaqui, tendo início das atividades no mês de março; dentre as atividades previstas no “Plano de Ação” estamos realizando monitorias e atividades de apoio, buscando compreender como os alunos aprendem Matemática. Para tanto, estamos buscando identificar as dificuldades dos alunos no estudo de conjuntos numéricos, bem como, investigar propostas didático-pedagógicas publicadas em eventos e revistas da Educação Matemática que contribuam na aprendizagem, em especial, de números inteiros.

Sendo assim, este trabalho tem por objetivo verificar o desempenho de um grupo de alunos do 7º ano de uma escola de sede estadual do município de Itaqui, ao resolverem uma



atividade envolvendo operação de multiplicação de números inteiros. Para isso, adotamos pressupostos da pesquisa qualitativa tomando como fonte de produção de dados os protocolos de 53 alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, o livro didático escolhido pela escola e resultados de pesquisas sobre ensino de operação de multiplicação de números inteiros.

Referencial teórico

Conforme já mencionamos na introdução, a construção do conceito de número inteiro requer que o aluno compreenda que este é uma extensão dos números naturais, ou seja, as leis do sistema de numeração válidas para os naturais continuam para os inteiros. No entanto, essas ampliações/extensões requerem uma atenção especial, pois é preciso eliminar vários obstáculos, por exemplo, “perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais; [ou seja] é possível adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado, como também é possível subtrair um número de 2 e obter 9” (BRASIL, 1998, p.98). Outro obstáculo na aprendizagem dos números inteiros é como explicar que “ $(-1) \times (-1) = 1$ ”.

Segundo Moretti (2012) uma obra pedagógica com o objetivo de fornecer uma explicação para a regra dos sinais para a multiplicação, é encontrada em Euler (1770). Na obra, o autor utiliza um argumento do tipo lógico: para justificar os casos “ $+ \times + = +$ ”, “ $- \times + = -$ ” e “ $+ \times - = -$ ” ele usa a ideia de ganho e dívida, respectivamente, para os números positivos e negativos, e, para o caso “ $- \times -$ ” é atribuído o resultado “ $+$ ” com a justificativa de manter o mesmo número de sinais positivos e negativos nos resultados desses quatro casos de multiplicações.

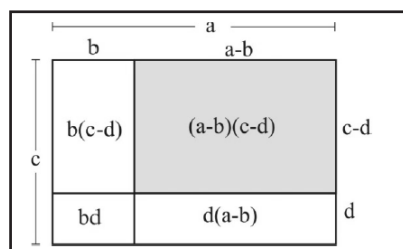
Entretanto, a regra que estabelece que “ $- \times - = +$ e “ $- \times + = -$ ” aparece de forma explícita na obra de Diofanto de Alexandria (MORETTI, 2012, p.22): “Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos”, em várias relações algébricas,

por exemplo, $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$, entretanto, nenhuma justificativa é dada a regra.

Anos mais tarde Hankel, em seu teorema, demonstra que a regra usual dos sinais é a única das regras possíveis, pelo fato de preservar a distributividade à esquerda e à direita, visto que estas propriedades já são válidas para números positivos, sendo assim são estendidas aos números negativos por influências do *princípio da extensão* (MORETTI, 2012). Hankel resolve o problema da regra dos sinais do ponto de vista matemático, entretanto, ficam muitas dúvidas relacionadas as questões didáticas desta regra.

Para atingir o objetivo deste trabalho, apresentaremos a seguir, os modelos didáticos descritos por Moretti (2012). Estes modelos são inspirados no desenvolvimento histórico dos números inteiros para explicar a regra dos sinais para a multiplicação. Conforme o pesquisador são três modelos, a saber: geométricos, baseados na relação de Diofanto de Alexandria; modelos baseados na ideia de balanço de duplas (ganho e perda), chamado por muitos de modelo comercial e modelos baseados no prolongamento dos naturais.

O modelo geométrico busca justificar a relação de Diofanto de Alexandria por meio da área de um retângulo. Conforme pode ser visto na Figura 1.

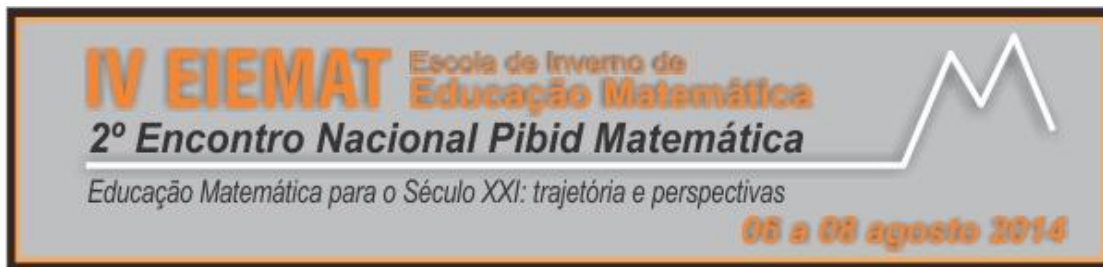


A área da Figura sombreada pode ser determinada por:

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Figura 1: Modelo Geométrico para se chegar à relação de Diofanto
 Fonte: MORETTI, 2012, p. 698

Segundo Moretti (2012), neste modelo, há limites para a constatação da regra dos sinais para o caso “ $- \times - = +$ ”, pois a distributividade é utilizada em um único sentido.



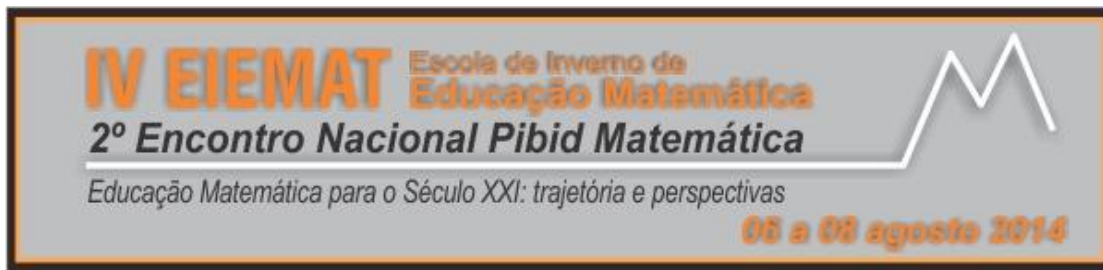
O modelo comercial (MORETTI, 2012) baseia-se na ideia de ganho/perda, crédito/débito, sobe/desce, presente/futuro, enche/esvazia, entre outros. Para explicar, por exemplo, a multiplicação de números negativos utiliza a ideia de tempo, associando ao sinal “-” o passado e ao sinal “+” o tempo presente. Este modelo pode auxiliar o aluno na resolução de problemas do campo aditivo, porém pode se tornar um obstáculo no campo multiplicativo. Vejamos o seguinte, um aluno pode facilmente compreender a situação, $-7 + 3 = -4$, associando -7 a uma dívida e $+3$ a um ganho, mas dificilmente se convencerá de que $-3 \times -2 = +6$.

Os modelos que se baseiam no prolongamento da reta numérica dos naturais exploram a regularidade observada, por exemplo, na seguinte sequência: $3(-4) = -12$; $2(-4) = -8$; $1(-4) = -4$; $0(-4) = 0$; $-1(-4) = 4$; ou seja, os resultados da multiplicação de números inteiros por -4 aumentam de 4 em 4. Este modelo é utilizado tanto pelos PCNs quanto pelo RC/RS¹.

Outro modelo para justificar a multiplicação de números inteiros negativos é o modelo do tipo lógico, proposto por Euler. Este modelo tem este nome porque justifica o caso “ $- \times - = +$ ” da seguinte forma: “uma vez que a regra da multiplicação para os casos ‘ $+ \times + = +$ ’, ‘ $- \times + = -$ ’ e ‘ $+ \times - = -$ ’ resulta em dois negativos e apenas um positivo para haver equilíbrio na quantidade dos resultados de sinais positivos e negativos, devemos ter então ‘ $- \times - = +$ ’” (MORETTI, 2012, p.702). Muitos professores, geralmente, explicam a regra dos sinais a partir deste modelo.

Analisando os modelos didáticos, apresentados acima, constata-se que o professor que trabalha com alunos do 7º ano fica diante de um dilema, ou seja, a explicação para a regra dos sinais está no Teorema de Hankel, entretanto, este ultrapassa a capacidade de compreensão destes alunos. Diante disso, Moretti (2012) propõe trabalhar com dois conjuntos de regras, o das usuais e um segundo no qual a operação $- \times - = -$, a fim de

¹Referencial Curricular do Estado do Rio Grande do Sul.



explorar a distributividade à direita e à esquerda, destacada no Teorema de Hankel. Observe a aplicação dessas duas regras à expressão $(1- 3) \times (-5 + 1)$:

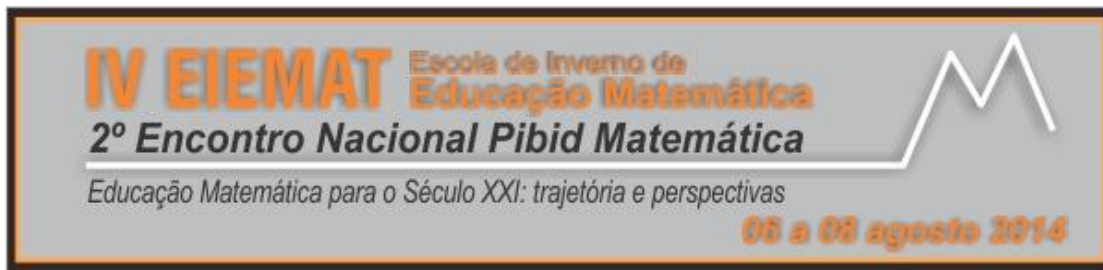
$(1- 3) \times (-5 + 1)$	Cálculo com a Regra usual	Cálculo com a Regra 2
Eliminando ambos os parênteses	-2×-4 $= +8$	-2×-4 $= -8$
Eliminando o parêntese à esquerda e usando a distributividade	$-2 \times (-5 + 1)$ $= -2 \times -5 -2 \times (+1)$ $= 10 - 2$ $= +8$	$-2 \times (-5 + 1)$ $= -2 \times -5 -2 \times (+1)$ $= -10 -2$ $= -12$
Eliminando o parêntese à direita e usando a distributividade	$(1- 3) \times -4$ $= 1 \times -4 -3 \times (-4)$ $= -4 + 12$ $= +8$	$(1- 3) \times -4$ $= 1 \times -4 - 3 \times (-4)$ $= -4 - 12$ $= -16$

Figura 2: Comparação entre as duas regras
Fonte: MORETTI, 2012, p. 698

A Figura 2 mostra os resultados obtidos com as duas regras, sendo que com a regra usual a propriedade distributiva é válida tanto à direita quanto à esquerda, já a segunda regra os resultados são diferentes nos dois sentidos.

Análise dos dados

Com o intuito de investigar os conhecimentos dos alunos do 7º ano relacionados a multiplicação com números inteiros, elaboramos um instrumento de produção de dados (Quadro 1). Este instrumento se baseia no modelo didático prolongamento da reta numérica dos naturais, sugerido pelos PCNs. Isto porque acreditávamos que este modelo poderia contribuir na atribuição de significados para a regra de sinais para a multiplicação de números inteiros. Por meio deste modelo, os alunos concluiriam que $- \times - = +$, a partir da análise da regularidade.



1- Preencha a tabela a baixo.

-3	-2	-1	0	1	2	3	×
		-3	0	3	6	9	3
		-2	0	2	4	6	2
		-1	0	1	2	3	1
		0	0	0	0	0	0
							-1
							-2
							-3

2- Explique/justifique como você resolveu as multiplicações da tabela a cima:

- a) $(3) \times (-2) =$ _____
 b) $(2) \times (-3) =$ _____
 c) $(-1) \times (1) =$ _____
 d) $(-2) \times (-1) =$ _____
 e) $(-3) \times (-3) =$ _____

Quadro 1: Atividade proposta aos alunos

Vale destacar que os alunos (51 alunos do 7º ano) participantes deste estudo já haviam realizado atividades de adição, subtração e multiplicação de números inteiros.

A partir da análise quantitativa dos protocolos dos alunos constatamos que, dos 51 alunos que realizaram as atividades com a tabela multiplicativa (item 1 da atividade), 30 fizeram a atividade corretamente, 19 acertaram parcialmente, 1 errou e 1 não realizou a atividade. No item 2da atividade, a qual solicitava que os alunos justificassem como obtiveram os resultados para 5 operações, verificamos que os alunos simplesmente utilizaram a regra de sinais memorizada sem conseguir explicar o resultado a partir da regularidade presente na tabela. Talvez, isto tenha ocorrido, pois não estão acostumados a identificar padrões/regularidades em seqüências numéricas.

Tentamos buscar justificativas para as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução da atividade proposta, analisando a forma como o livro didático escolhido pelos professores da escola propõe o estudo da operação de multiplicação de números inteiros.

Verificamos que o livro apresenta esse conteúdo de forma rápida e sucinta, trazendo apenas um exemplo falando de 4 alunos e a quantidade de respostas corretas e incorretas de cada um deles obtidas em uma prova (figura 3).

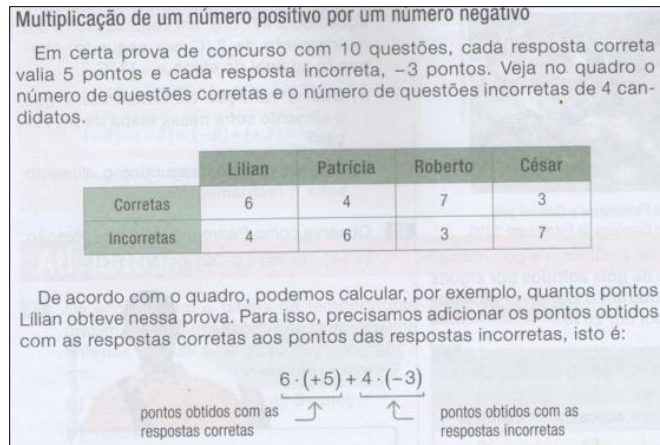


Figura 3: Multiplicação de um número positivo por um número negativo

Para obter o resultado de $4 \times (-3)$ os autores recorrem a adição de parcelas iguais e a representação na reta numérica (figura 4). Entendemos que, neste caso (multiplicação de um número positivo por um negativo), as representações escolhidas pelos autores podem contribuir na compreensão dos alunos, mas cabe ressaltar que, a reta numérica é uma representação auxiliar bastante produtiva para o estudo dos números inteiros negativos no campo aditivo (MORETTI, 2012).

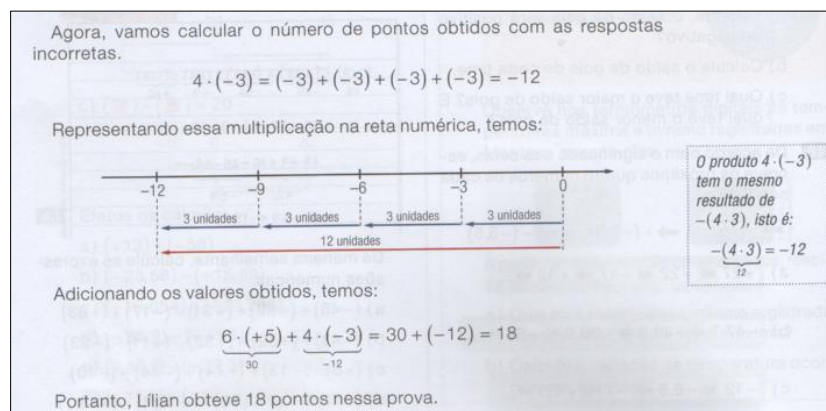


Figura 4: Reta numérica para explicar a multiplicação de $4 \times (-3)$

Em seguida, os autores utilizam o conceito de oposto para justificar as regras para a multiplicação de números inteiros, em destaque, conforme figura 5.

Multiplicação de um número negativo por um número positivo

Vimos anteriormente como calcular o produto de um número positivo por um número negativo. Veja a seguir como podemos encontrar o resultado de uma multiplicação cujo 1º fator é um número negativo e o 2º, um número positivo. Para isso, vamos calcular $(-2) \cdot (+3)$.

- Inicialmente, substituímos -2 por $-(+2)$, pois $+2$ é o oposto de -2 . Em seguida, efetuamos o cálculo e encontramos o resultado.

$$(-2) \cdot (+3) = -\underbrace{(+2) \cdot (+3)}_{+6} = -(+6) = -6$$

- Outra maneira de realizar esse cálculo é utilizando a propriedade comutativa da multiplicação.

$$(-2) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$$

Multiplicação de um número negativo por outro número negativo

Para encontrar o produto de uma multiplicação cujos fatores são números negativos, procedemos de maneira semelhante à vista anteriormente. Veja, por exemplo, como podemos calcular $(-3) \cdot (-4)$.

Substituímos -3 por $-(+3)$, pois $+3$ é o oposto de -3 , e efetuamos o cálculo.

$$(-3) \cdot (-4) = -\underbrace{(+3) \cdot (-4)}_{-12} = -(-12) = 12$$

A maneira de resolver o cálculo $(+3) \cdot (-2)$ você já viu no tópico anterior.

► Em uma multiplicação de dois fatores, em que:

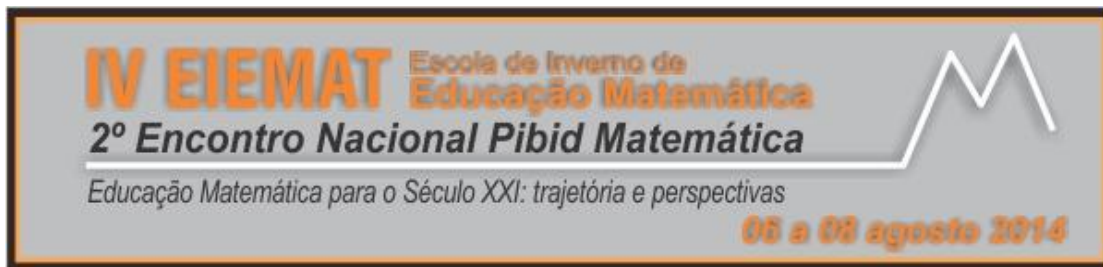
- ambos têm o mesmo sinal, o resultado é sempre um número positivo;
- um fator é positivo e outro negativo, o resultado é sempre um número negativo.

Figura 5:Regras para multiplicação de números inteiros

Ao analisarmos a proposta do livro didático verificamos que os autores buscam uma situação semelhante às utilizadas no modelo comercial para justificar a regra dos sinais para o operação de multiplicação de números inteiros, bem como, dá muita ênfase nas regras em detrimento a produção de significados. Talvez isto tenha influenciado as repostas dos alunos, em especial, no item 2 da atividade, visto que eles não conseguiram explicar os resultados obtidos.

Considerações Finais

Os resultados do estudo revelam que os alunos não compreendem o processo envolvido na multiplicação de números inteiros, especialmente o caso $- \times - = +$. Além disso, ao analisar o livro didático, verificou-se que o modelo escolhido assemelha-se muito



ao modelo comercial, segundo Moretti (2012) este modelo não contribui para produção de significados relacionados a operação de multiplicação de inteiros.

Concordamos com Moretti (2012) ao sugerir o trabalho com situações em que fiquem explícitas a necessidade de que $- \times - = +$, a fim de garantir a distributividade tanto pela direita quanto pela esquerda.

Considerando que estamos iniciando as atividades do PIBID, acreditamos que, fundamentados nas pesquisas desenvolvidas na área da Educação Matemática e na vivência de sala de aula, conseguiremos desenvolver um trabalho que contribua para amenizar as dificuldades dos alunos, bem como, ampliar nossos estudos para compreender como os alunos aprendem Matemática. Para tanto, já estamos organizando situações que busquem explorar as propriedades das operações, em especial, a distributividade, para que os alunos consigam ampliar e ressignificar as operações dos naturais para os inteiros.

Referências Bibliográficas

BRASIL. *Ministério da Educação e do Desporto*. Parâmetros Curriculares Nacionais- Matemática 5ª a 8ª série. Brasília: SEF, 1998.

HILLESHEIN, S. F.; MORETTI, M. T. *Alguns aspectos da noção da congruência semântica presentes no ensino dos números inteiros relativos*. Espaço Pedagógico, v. 20, n. 1, Passo Fundo, RS, 2013.

MORETTI, M. T. *A Regra dos Sinais para a Multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática*. Bolema, v. 26, n. 42B, Rio Claro, SP, 2012.

PONTE, M. O. *Obstáculos Superados pelos Matemáticos no Passado e Vivenciados pelos alunos na Atualidade: A Polêmica Multiplicação de Números Inteiros*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Educação, UFRN, 2010.