IV EIEMAT Escola de Inverno de Educação Matemática
2º Encontro Nacional Pibid Matemática
Educação Matemática para o Século XXI: trajetória e perspectivas
06 a 08 agosto 2014

ISSN 2316-7785

APLICAÇÃO DA INTEGRAL DEFINIDA NA ECONOMIA - UMA VISÃO DO FUTURO PROFESSOR

Jaqueline Valle
UDESC
jaqeline.valle@gmail.com

Dienifer Tainara Cardoso
UDESC
cardoso.dienifer@gmail.com

Elisandra Bar de Figueiredo
UDESC
elis.b.figueiredo@gmail.com

Ivanete Zuchi Siple
UDESC
ivazuchi@gmail.com

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma experiência desenvolvida na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina- UDESC, envolvendo a aplicação de integral definida no contexto da economia. Em geral, a definição de integral definida é feita a partir de soma de Riemann e, suas aplicações mais usuais estão relacionadas ao cálculo de área de uma região, comprimento de uma curva e volume de um sólido de revolução. Porém, existem várias outras aplicações que são interessantes e que, em virtude da limitação do cronograma, não são exploradas em sala de aula. Com o intuito de explorar outras aplicações, além das usuais, foi proposta aos alunos uma investigação sobre a aplicação da integral com o referido embasamento teórico e justificativa dessa aplicação. Ilustraremos um traço dessa experiência, apresentando para isso uma das aplicações desenvolvidas – benefício ao consumidor, evidenciando as escolhas, as dificuldades e a visão do discente no percurso dessa investigação. Tal trabalho possibilitou aos alunos - professores em formação - perceberem a importância da conexão entre teoria e prática.

Palavras-chave: Integral definida; Beneficio ao consumidor; Formação inicial.

1. Introdução

O estudo da integral definida está contemplado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II (CDI-II), que faz parte da terceira fase da matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina-UDESC, dando continuidade ao estudo de integrais iniciado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI-I), conforme Projeto Pedagógico do Curso -PPC (2006).

Em geral, a definição de integral definida é feita a partir do conceito de soma de Riemann, ou seja, a noção de integral definida é dada como sendo uma soma de infinitas parcelas infinitesimais. Com base nesse conceito, a integral definida pode ser aplicada em diversas áreas de estudos, como por exemplo, na geometria, física, computação e economia. Esse objeto de estudo é abordado com maior ou menor profundidade, de acordo com o objetivo de cada curso. A importância do ensino de integrais na formação do professor, é inquestionável, pois ele representa a ferramenta de diversas aplicações, como por exemplo: cálculo de áreas, perímetros, volumes, trabalho realizado por uma força, centro de massa, montante, dentre outras.

Apesar de sua grande importância, o ensino de integrais limita-se, muitas vezes, à memorização de técnicas de integração. Muitos alunos saem de um curso de cálculo sem entendê-las e nem sequer relacioná-las com limites e derivadas. O espaço da abordagem da integral definida torna-se um ambiente rico para romper com essa barreira, pois é possível trabalhar com muitas aplicações. Entretanto, com um cronograma, muitas vezes, limitado fica difícil, apenas no ambiente de sala de aula, poder explorar várias aplicações que fazem parte desse contexto. Em geral, as aplicações mais usuais estão relacionadas ao cálculo de área de uma região, comprimento de uma curva e volume de um sólido de revolução. Porém, existem várias outras aplicações que são interessantes. Com o intuito de explorar outras aplicações, além das usuais foi proposto aos alunos de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina, no primeiro semestre de dois mil e quatorze, uma investigação sobre a aplicação da integral definida, referente a uma área de estudo do curso, na qual deveriam ser apresentados os resultados por meio de um trabalho, abrangendo uma aplicação da integral definida com embasamento teórico e justificativa da referida aplicação.

Nesse trabalho, ilustraremos um traço dessa experiência, apresentando para isso uma das aplicações desenvolvidas, nas quais estão evidenciadas as escolhas dos discentes, bem como as dificuldades encontradas, e o olhar desses discentes no percurso do trabalho.

2. Aplicação da Integral definida: traços de uma experiência

Ao ser proposto pela Professora regente, uma investigação sobre as aplicações da integral definida, ficamos, a priori, receosas sobre o desenvolvimento do trabalho, pois não poderíamos abordar as aplicações já exploradas em sala de aula, tais como área, comprimento e volume. Então nossa dúvida era: Será que encontraríamos outras aplicações da integral definida? Inicialmente, não conseguíamos visualizar respostas para essa pergunta.

Ao iniciarmos nossa pesquisa, logo descobrimos uma variedade de aplicações, sendo algumas delas na área da física e outras em estudos relacionados às áreas da matemática. Constatamos também que a integral não faz parte somente da matriz curricular de cursos de graduação, pois as noções de suas aplicações estão indiretamente inseridas já no ensino fundamental com a análise de medidas de área, comprimentos e volumes. Como um dos objetivos do trabalho era que a aplicação da integral deveria estar associada a nossa área de formação, optamos por uma aplicação relacionada à economia, na análise de benefício ao consumidor. Tal aplicação está fortemente relacionada com a matemática, além de estar inserida no cotidiano da população, em geral.

Na sociedade fortemente capitalista em que nos encontramos, qualquer indivíduo, em algum momento de sua vida assume o papel de consumidor ou fornecedor nas relações de mercado onde os conceitos abordados na aplicação da integral definida pesquisados durante a realização desse trabalho estão inseridos. Tal aplicação abordará os conceitos ligados ao mercado, tais como o lucro obtido em determinada compra, análise de valor pago por unidade de mercadoria e a demanda consumida que resultará no benefício ao consumidor.

O valor do benefício ao consumidor ou o lucro que o consumidor obtém quando paga um preço inferior ao que realmente estaria disposto a pagar é obtido a partir da curva de demanda[1]. Para ilustrar consideremos a função da demanda de um certo produto, produzido por uma empresa, dada por $p = f(x)$, onde p é o preço unitário quando x unidades são demandadas. A figura 1 representa uma curva de demanda $p = f(x)$, sendo que no eixo das abscissas está fixada a quantidade do produto e no eixo das ordenadas o preço por unidade do produto. Assim ao comprar uma quantidade x de um produto o valor pago pelo consumidor por cada unidade é de $p = f(x)$. Assim, a função que representa o valor pago (que denominaremos *v*) para adquirir x unidades de produto será dada por $v = xf(x)$. Observa-se na figura 1 que a função que representa a curva de demanda tem um comportamento decrescente, isso ocorre na maioria dos casos, pois conforme Larson e Edwards (2008) quanto maior o preço unitário menor o interesse do comprador em adquirir o produto.

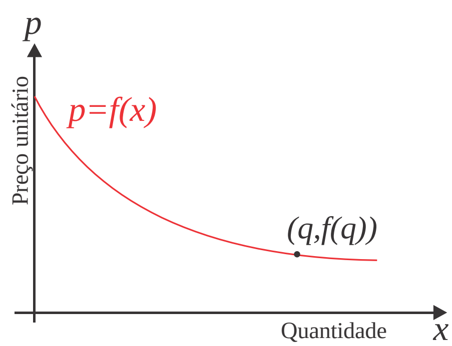

Figura 1: função demanda

Denotamos por q a quantidade disponível do produto e $p = f(q)$ o preço de venda. Particionaremos o intervalo $[0, q]$ em *n* subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{q}{n}$, sendo o x_i a extremidade direita do i-ésimo intervalo, conforme ilustra a figura 2. Suponhamos que no primeiro subintervalo a quantidade de produtos disponíveis seja x_1, desta forma o preço estipulado por unidade desse produto é dado por $f(x_1)$. Se todas as x_1 unidades disponíveis

[1] Demanda é a quantidade que os consumidores desejam adquirir por um preço definido em um mercado específico.

forem vendidas pelo preço fixado $p = f(x_1)$, então o valor pago v_1 da venda dessas unidades será dado por:

$$v_1 = x_1 f(x_1) = f(x_1) \Delta x.$$

Se após a venda dessas x_1 unidades, forem disponibilizadas mais unidades, de forma que num determinado momento, a quantidade de produtos produzidos for x_2 $(x_2 > x_1)$ e o preço unitário desses produtos for fixado em $f(x_2)$, nessa situação o valor pago v_2 da venda dessas unidades será dado por:

$$v_2 = (x_2 - x_1)\ f(x_2) = f(x_2) \Delta x$$

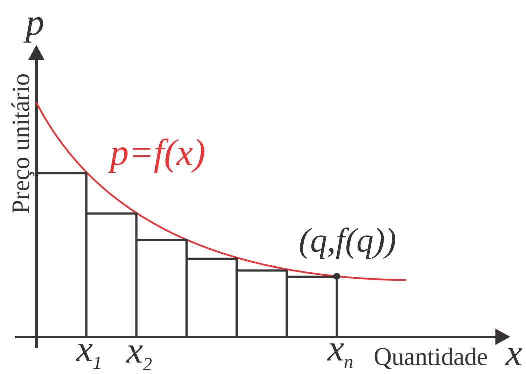

Figura 2: partição do intervalo

Então, usando o processo indutivo, o montante pago pelos consumidores para o correspondente a q unidades de produtos será dado pela soma dos preços de venda de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ unidades. Ou seja,

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + \cdots + f(x_n).\Delta x \qquad (1)$$

A equação (1) é uma soma de Riemann da função *f* no intervalo $[0, q]$. O valor pago pelos consumidores por esses produtos é dado pela integral definida

$$v = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x) \Delta x \quad = \int_0^A f(x) dx.$$

Note que a integral descrita calcula a área da região sob a curva da demanda no intervalo $[0, q]$, pois $p = f(x)$ é uma função positiva nesse intervalo.

Porém, no sistema aberto em que esse processo de consumo acontece, essa alteração tão significativa de preços, de acordo com uma alteração mínima na quantidade de produtos (Δx), não acontece, assim todos os consumidores pagam o mesmo preço, ou seja, no caso em que existem q unidades disponíveis, o preço pago por qualquer consumidor, independentemente do número de unidades que esse irá adquirir será $f(q)$.

Portanto o montante pago será:

$$v = f(q)\mathrm{q} = \ [preço\ por\ unidade].[número\ de\ unidades].$$

Note que nesse caso, o montante a ser pago é igual a área do retângulo KLMN, conforme ilustra a figura 3.

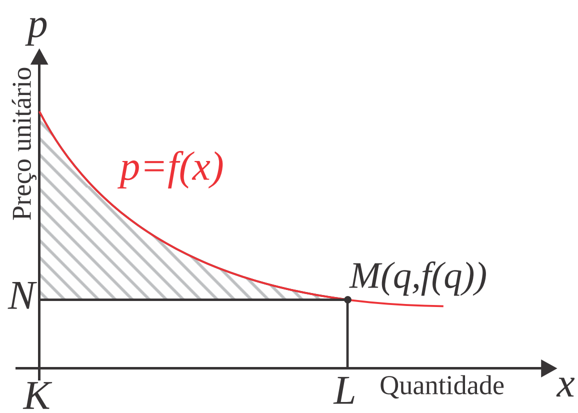

Figura 3: representação do benefício ao consumidor

Assim o valor do benefício ao consumidor, denominado por B_c, é dado pela área hachurada na figura 3, que pode ser aproximada pela soma Riemann dada por:

$$B_c \ = (f(x_1) - f(q))\Delta x + (f(x_2) - f(q))\Delta x + \cdots + (f(x_n) - f(q))\Delta x$$

e o valor exato pela integral definida

$$B_c \ = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(x) - f(q))\Delta x \ \ = \int_0^A (f(x) - f(q))dx.$$

Ilustraremos esse processo, com um exemplo adaptado de Goldstein et all (2012):

Encontre o benefício do consumidor para a curva de demanda $p = 50 - 0{,}06x^2$ em um nível de venda de 20 unidades.

Solução: Na figura 4 está representando a curva de demanda, o montante que o consumidor irá pagar e o benefício que ele terá.

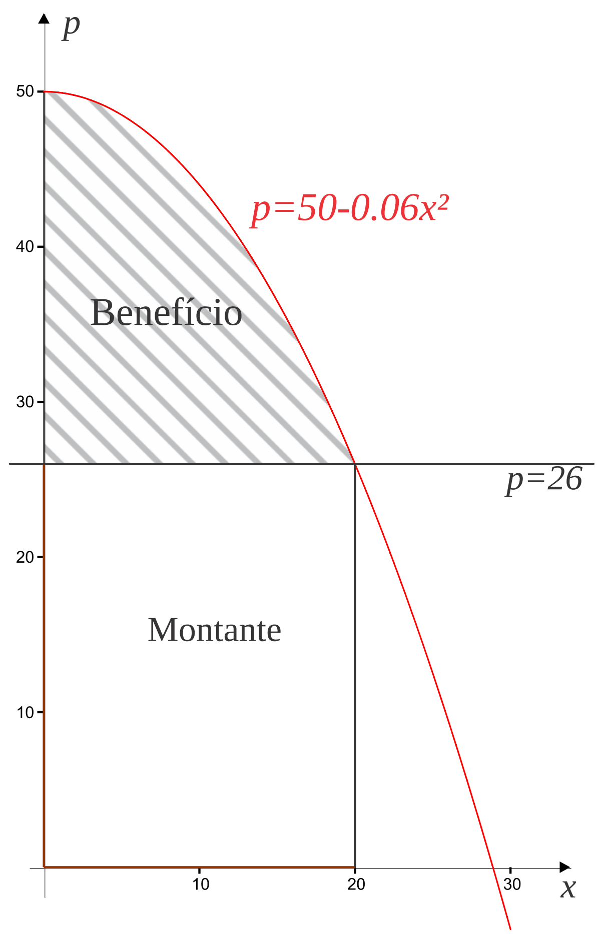

Figura 4: representação geométrica do problema

Como serão vendidas 20 unidades do produto o preço será:

$$p(20) = 50 - 0{,}06\,(20)^2 = 50 - 24 = 26.$$

Dessa forma, o benefício do consumidor é a área hachurada na figura 4, que é dada pela integral:

$$B_c = \int_0^{20} [(50 - 0{,}06x^2) - 26]\,dx = \int_0^{20} (24 - 0{,}06x^2)\,dx = (24x - 0{,}02x^3)\Big|_0^{20} =$$

$$= 24(20) - 0{,}02(20^3) = 480 - 160 = 320.$$

Portanto, o benefício do consumidor é de 320,00 reais.

3. Ensino da integral definida na Formação de professores – o olhar do futuro professor

> "O ensino deveria ser assim: quem o receba o recolha como um bem inestimável, nunca como uma obrigação penosa." (Einstein, 1981, p.16).

Durante nossa experiência como discentes e docentes em formação do curso de licenciatura em matemática observamos que muitos alunos questionam a relevância do ensino cálculo diferencial e integral em cursos de formação de professores, e defendem que para uma parte significativa de acadêmicos da licenciatura esse tipo de conteúdo é visto como um obstáculo em sua formação, contribuindo para o alto índice de desistência e abandono do curso.

Na prática o que acontece é que muitos alunos apresentam uma indisposição e resistência a estudar determinados conteúdos, como o de integral, causadas pela preocupação com o grau de complexidade das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, dificultando assim a aprendizagem.

Em nossa ótica, propostas de trabalhos como o desenvolvido auxiliam positivamente para resolver ou amenizar alguns dos problemas relacionados às dificuldades dos alunos. Haja vista que a pesquisa de aplicações direcionadas ao conteúdo de integral proporcionou ao aluno situações práticas do uso da integral como uma ferramenta, facilitando o estudo de questões cotidianas relacionadas a matemática.

A pesquisa da aplicação da integral nos proporcionou uma melhor compreensão do conteúdo estudado na disciplina de Cálculo, pois por meio do estudo da aplicação da integral analisamos os conceitos relacionados a teoria de integral definida de um modo prático e com isso formamos uma noção mais aprimorada e ampla sobre integral definida.

Após a finalização do trabalho construímos uma nova visão da disciplina de Cálculo, concluímos que as aprendizagens construídas no decorrer da disciplina são de extrema importância para continuação de nossos estudos no curso de formação de professores. Antes da execução dessa pesquisa, muitas vezes, associávamos a necessidade do estudo dessa a seu uso em disciplinas de fases mais avançadas do curso, porém constatamos que a integral tem um papel essencial na matemática, por apresentar uma vasta possibilidade de aplicações em diversos ramos de estudo dessa ciência. Sendo assim, temos que a integral também é essencial na formação de professores de matemática, pois acreditamos que para sermos bons mediadores de conhecimentos matemáticos, é necessário que tenhamos um bom domínio do mesmo, em outras palavras, como futuros professores de matemática necessitamos de uma ampla fundamentação nessa área.

Nossa pesquisa não se limitou somente a aplicação da integral definida em beneficio ao consumidor, inicialmente pesquisamos outras aplicações para então escolhermos aquela para qual direcionaríamos nossos estudos, e durante essa pesquisa percebemos que os temas abordados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral compõem a essência da matemática.

5.Conclusão

Profissionais e estudiosos da área da educação matemática têm uma preocupação constante com a dificuldade enfrentada pelos acadêmicos do curso de formação de professores de matemática quanto a compreensão e aplicação dos conteúdos que compõem o plano de ensino de disciplinas como a de Cálculo Diferencial e Integral. Sendo assim, nós como estudantes de licenciatura, estamos sempre buscando metodologias inovadoras que possam ser utilizadas no processo de aprendizagem, proporcionando a aquisição do conhecimento desejado.

Não é trivial para os alunos perceberem a grande relação do cálculo, especificamente da integral, ligada com o cotidiano. Porém, um processo de ensino e aprendizagem baseado na relação teoria e prática pode se revelar um ambiente rico para essas conexões.

Observou-se com o trabalho proposto, que não é necessária uma pesquisa fortemente elaborada sobre economia para entender a aplicação da integral definida, pois pequenas noções como lucro, demanda e custos foram suficientes para compreender o problema proposto. E claro, que, além disto, também percebemos que muitas vezes os alunos não exploram outras aplicações, por acreditarem que o contexto nas quais estão inseridas são de difícil compreensão. Percebemos, na aplicação relatada que essa premissa muitas vezes é falsa, pois para nós foi de fácil entendimento, tanto em nível matemático quanto de contexto.

Com a experiência vivenciada, como futuros professores, percebemos o quão significativa é a aprendizagem quando incentivado o estudo de aplicações práticas. Percebemos que além do estudo teórico é de suma importância que a análise do funcionamento da aplicação prática da teoria estudada esteja presente no processo ensino-aprendizagem.

Referências bibliográficas

EINSTEIN, Albert. *Como vejo o mundo / Albert Einstein*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1981. 90 p.

GOLDSTEIN, Larry J; DAVID C. Lay, DAVID I. Schneider. *Matemática aplicada: economia, administração e contabilidade*.10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006. 692 p.

LARSON, Ron; EDWARS, Bruce H. *Cálculo com Aplicações*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 710 p.

PPC – MATEMÁTICA. Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática – UDESC. Joinville, 2006. Disponível em <http://www.joinville.udesc.br/portalc/ensino/graduacao/matematica/arquivos/PPC_Matematica.pdf>. Acesso em: 17 jun. 2014.