IV EIEMAT Escola de Inverno de Educação Matemática
2º Encontro Nacional Pibid Matemática
Educação Matemática para o Século XXI: trajetória e perspectivas
06 a 08 agosto 2014

ISSN 2316-7785

A QUESTÃO DA INCOMENSURABILIDADE: DO EMBARAÇO PITAGÓRICO ÀS OBRAS DE LEONARDO DA VINCI ─ UMA PROPOSTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PELA HISTÓRIA E PELA ARTE.

Rodolfo Chaves[1] ─ **Ifes** ─ rodolfochaves20@gmail.com
Caio Lopes Rodrigues[2] ─ **Ifes** ─ caiolr1988@hotmail.com

Resumo

Este texto apresenta a fundamentação teórica adotada para embasar o minicurso, de mesmo título, dirigido a professores (formação: pré-serviço e em serviço) da Educação Básica. A proposta é tratar de forma interativa e manipulativa ─ sem distanciar-se de conceitos matemáticos ─ da temática sugerida, abordando historicamente os seguintes aspectos: (i) a questão da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado; (ii) tratamento prático do uso do *Pi* e do número de ouro na construção de pirâmides egípcias; (iii) o cálculo do número de ouro a partir de princípios de proporcionalidade e resolução de equação do 2º grau; (iv) A presença do *Pi* e do número de ouro na natureza; (v) a existência de padrões matemáticos nas obras de Leonardo Da Vinci; (vi) possibilidades de abordagens do caráter *inter*, *trans* e *pluri* ou *multidisciplinar* de Matemática e Artes na sala de aula. O objetivo não se restringe tão-somente à busca da transversalidade entre Matemática e Artes, mas apresentar a Matemática como ferramenta de leitura de processos, fenômenos, modelos e textos, dos quais se destacam obras de arte. A ideia é municiar o professor (sobretudo com análises e investigações a partir da própria prática) com instrumentos que possibilitem romper com dispositivos táticos de controle do Ensino Tradicional de Matemática (ETM): centralismo e expositivo professoral onde o conteúdo é apresentado de forma imutável, descontextualizada, linear a partir do receituário: definição + propriedades + exemplos + exercícios de fixação + teste. Este trabalho fundamenta-se a partir da pesquisa de natureza qualitativa, bibliográfica e exploratória, porém, também do tipo participante, visto que todos os procedimentos foram discutidos em sessões plenárias do Grupo de Pesquisa em Matemática Pura, Aplicada e Educação Matemática – Gepemem. O mesmo é base constituinte ao Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) cujo título é: "*É possível identificar padrões matemáticos em obras de Leonardo Da Vinci? Que padrões são esses?*".

Palavras-chave: Ambiente Investigativo de Aprendizagem; História da Matemática; Grandezas *incomensuráveis*; Número de Ouro.

---

[1] Mestre e Doutor em Educação Matemática pela UNESP – Rio Claro. Docente do curso de Licenciatura em Matemática, campus Vitória. Coordenador institucional do Programa de Apoio a Laboratórios Interdisciplinares de Formação de Educadores (LIFE – CAPES). Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educação Matemática (Gepemem – Ifes).

[2] Licenciando em de Licenciatura em Matemática do campus Vitória. Membro do Gepemem – Ifes.

1. Problemática

1.1. *A relação primitiva de Matemática e Artes e a gênese da ruptura entre as mesmas*

A Matemática, como área do conhecimento na História da humanidade é tomada como ferramenta de leitura do mundo em diversas áreas ─ Física, Química, Biologia, História, Filosofia, Geografia, Música, Artes, Astronomia, Linguagens etc.

> Ao retratar paisagens e animais e, mais tarde, esculpir em ossos marcas que representavam os animais capturados, o homem primitivo iniciou a busca da organização do seu entorno por meio da Arte e da Matemática. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 13)

O uso de seus princípios, conceitos e métodos, ao longo dos tempos, tem sido relevante à construção e à transformação de sociedades. Desde a pré-história, como descrito na citação antecedente, há relatos de sua utilização. Foi estudada e empregada por babilônios, chineses e gregos, por exemplo. Foi base de pensamentos de grandes vultos na História das civilizações. Platão[3] colocou na inscrição da porta de entrada de sua academia: *"Que ninguém ignorante em Geometria entre aqui."*. Aristóteles[4] e Pitágoras[5], dentre outros pensadores gregos da época, direta ou indiretamente, apoiaram o estudo da Matemática,

---

[3] Platão (427 – 347 a.C.), aristocrata de nascimento, filósofo grego nascido em Atenas, considerado um dos principais pensadores gregos, pois influenciou profundamente a filosofia ocidental. Suas ideias baseiam-se na diferenciação do mundo entre as coisas sensíveis (mundo das ideias e a inteligência) e as coisas visíveis (seres vivos e a matéria). Teve sua obra interpretada de maneiras diversas, “[...] tanto por Aristóteles quanto por Plotino. Descartes, Kant e Hegel inspiraram-se nela. E ela nos ensina que existe um ponto de convergência de todos esses caminhos, bem além das aparências ilusórias que só levam ao ceticismo e à inadequação do espírito. Baseia-se em sua fé na autoridade da razão que, adquirida pelo homem, permite-lhe transpor as fronteiras da necessidade, e ao mesmo tempo, merecer sua própria dignidade.” (HUISMAN, 2001, p. 774).

[4] Aristóteles (384 - 322 a.C.), filósofo grego, nasceu em Estágira, colônia de origem jônica no reino da Macedônia. Por ser filho do médico do rei Amintas, gozou de privilégios para estudar. Aos 17 anos, foi enviado para a Academia de Platão em Atenas, na qual permanecerá por 20 anos, inicialmente como discípulo, depois como professor, até a morte de Platão. Possuía gosto pelos conhecimentos experimentais e da natureza, ao mesmo tempo em que obteve sucesso como metafísico.

[5] Pitágoras de Samos (580 a 500 a.C.), filósofo e matemático grego que teve como mestres ou interlocutores, Tales de Mileto (624 a.C. a 546 a.C.), precursor do raciocínio dedutivo e da Geometria Demonstrativa, um dos sete sábios da Antiguidade, Anaximandro Sonchi – sacerdote egípcio – e Zaratustra, dentre outros. Viajou pelo Egito e Babilônia antes de se estabelecer em Crótona (região da Magna Grécia, atualmente Itália), onde criou a Escola Pitagórica, com forte tendência esotérica.

tanto na sua forma abstrata – e até esotérica – quanto no auxílio de resolução de problemas práticos. O que leva a inferir que a Matemática foi de suma importância na base da formação das sociedades antigas e a relação entre Matemática e Arte não é fruto de modismo contemporâneo ou pós-moderno.

> Com a construção de armas e utensílios utilizando pedras, ossos e madeira, que depois de prontos eram decorados, começou a existir também a convivência entre formas, tamanhos ou dimensões com símbolos e padrões. No decorrer da história humana, a Arte e a Matemática continuaram a contribuir para organizar e explicar as aquisições culturais. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 14)

O seu estudo não era tão-somente destinado para resolver problemas, mas a Matemática foi motivo de admiração e fascínio de povos antigos, ou seja, a Matemática foi tomada como Arte e Filosofia, técnica e ciência. Desde a antiguidade clássica, na Arte grega observamos certa preocupação com a busca exacerbada pela simetria, pela beleza clássica a partir da estética que tomava as relações áureas como padrão. Na Arte romana, por exemplo, mosaicos eram construídos a partir de soluções daquilo que hoje designamos por matrizes − para arcos, distribuição de cores, ocupação espacial. A precisão e marcação juntavam-se a todos os anseios e desejos do artista, em chegar ao ápice de sua obra prima, sendo a Matemática o desenrolar dos carretéis para o aperfeiçoamento das obras artísticas.

Contudo, os pitagóricos, a partir da instituição do regime de verdade de que “Tudo é número”, abrem espaço à perpetuação da crença de que a Matemática, por si só, poderia explicar o mundo, não necessitando, para tal, de nenhuma outra vertente do conhecimento, incluindo aí também a Arte. Tal pensamento “em conjunto com o desprezo que Platão sentia pelos artistas plásticos coloca a Matemática e a Arte em patamares distintos e pode ter contribuído para o afastamento entre a Arte e a Matemática." (ZALESKI FILHO, 2013, p. 25).

> [...] em algum momento da história da humanidade, a Arte "afastou-se" da Matemática e de outros campos das ciências. Qual o motivo, ou quais são os motivos desse afastamento? Talvez uma das razões tenha sido uma herança da Filosofia Grega: a ideia de um mundo dividido em superior e inferior [...] (ZALESKI FILHO, 2013, p. 13)

1.2. *Uma possível gênese à descontextualização do ensino da Matemática*

Chaves (2004, p. 160-161) destaca que um ambiente de aprendizagem pautado em um currículo rígido, onde o aluno é colocado como um ser passivo às informações advindas do professor por meio de exposições homiléticas não é exclusividade das sociedades modernas e pós-modernas. Arquitas[6], responsável pela continuidade da tradição pitagórica, pôs a Aritmética acima da Geometria, contudo, sua relação com os números não era tão esotérica como para Pitágoras ou mística e religiosa para Filolau[7] de Crotona.

> Arquitas parece ter dado considerável atenção ao papel da matemática no aprendizado, e foi-lhe atribuída a designação dos quatro ramos no *quadrivium* matemático – aritmética (ou números em repouso), geometria (ou grandezas em repouso), música (ou números em movimento) e astronomia (ou grandeza em movimento). Esses temas, juntos com o *trivium* consistindo de gramática, retórica e dialética (eu Aristóteles atribuía a Zeno), constituíram mais tarde as sete artes liberais, portanto o papel proeminente que a matemática desempenhou na educação se deve em não pequena medida a Arquitas. (BOYER, 1978, p. 52)

Para negar o paradigma existente − que consagra a hegemonia do Ensino Tradicional de Matemática (ETM), pautado em verdades cristalizadas, que põem a ordem curricular acima do diálogo, da criatividade e da investigação como forma de aprendizagem − Chaves (2004) aponta que, após Arquitas, que valorizava a música, o que vemos é um apego às coisas estáticas onde a ideia de movimento foi gradativamente esquecida, tornando-a assim estática, descontextualizada.

Plotino[8], que espiritualizava a Arte, transcende Platão e defende que:

---

[6] Sábio grego (428 e 365 a.C.) a quem foi atribuído o desenvolvimento do processo e algoritmo para extração de raiz quadrada (processo conhecido como algoritmo de Newton) mas, segundo Boyer (1978, p.21) este processo já era conhecido pelos mesopotâmios.

[7] Filósofo grego (± 470 a 385 a.C.) que escreveu um livro em que expunha a doutrina pitagórica (que era reservada apenas aos discípulos). Foi o primeiro pensador a atribuir movimento à Terra propondo um sistema no qual a Terra girava em torno de um fogo central, que não era o Sol.

[8] Filósofo grego (205 a 270 d.C.), nascido no Egito, dividia o universo em três hipóstases: O *Uno* − refere-se a Deus, dado que sua principal característica é a indivisibilidade − o *Nous* (ou mente) − termo

> […] a imitação dos objetos visíveis é um motivo para a atividade artística cuja finalidade é intuir as essências ou ideias. Para ele, a Arte, além de uma atividade produtiva, é um meio de conhecimento da Verdade. (ZALESKI FILHO, 2013, p. 25)

Marilena Chaui (in: LAFRAGUE, 1999, p. 11-12) e Chaves (2004, p. 164-165) nos lembram de que "para os antigos, só era possível dedicar-se à atividade do conhecimento se não estivesse escravizado pela obrigação de trabalhar". A própria gênese da palavra escola está comprometida com o ócio, logo com a formação do homem teórico, pois ócio, em grego, se diz *scholé* que deu origem à palavra escola.

> A ideia do trabalho como desonra e degradação não é exclusiva da tradição judaico-cristã. Essa ideia aparece em quase todos os mitos que narram a origem das sociedades humanas como efeito de um crime cuja punição será a necessidade de trabalhar a viver. Ela também aparece nas sociedades escravistas antigas, como a grega e a romana, cujos poetas e filósofos não se cansam de proclamar o ócio como um valor indispensável para a vida livre e feliz. (LAFRAGUE, 1999, p. 20)

Nessas sociedades, a atividade de produzir uma obra era tão desprezível que não havia a palavra trabalho. Conta-nos Chauí que os vocábulos *ergon* (em grego) e *opus* (em latim) referem-se exclusivamente às obras já produzidas, acabadas; isto é, tais sociedades não valorizavam o processo, mas tão-somente a obra concluída (o produto), tanto que artistas, artífices, pintores e escultores não pertenciam à nobreza. Para eles os admiradores e críticos (praticantes do ócio) possuíam mais prestígio do que aqueles que desenvolviam a dinâmica de construção da obra. Neste contexto a Arte exerce papel secundário, visto que, com a implantação do *trivium* enquanto currículo, esta se destinava aos comuns e não a uma formação específica, ou preparação para o trabalho, pelos motivos apresentados e que fundamentam a justificação do *opus* e do *ergon*: "aliás, não é outra a origem da expressão 'isto é trivial'." (ZALESKI FILHO, 2013, p. 34).

1.3. *Ensinar não implica aprender*

---

filosófico grego que significa atividade do intelecto ou da razão em oposição aos sentidos materiais, dos quais muitas obras designam como sinônimo de "Inteligência" ou "Pensamento" − e a *Alma*.

Pelo modelo usual de se ensinar Matemática, adotado pelo ETM, o professor é o emissor da enunciação e o aluno o receptor e por isso lembremo-nos que, quem produz significado a respeito do que foi enunciado é o receptor e não o emissor da enunciação; dessa forma ensinar não implica necessariamente aprender. Assim, entendemos que não adianta pensarmos em passar uma grande quantidade de conteúdos e conceitos se estes não forem bem assimilados, apreendidos. Logo, ao invés de quantidade, por que não nos preocupar com qualidade de informação (qualidade referente à aplicabilidade, à assimilação, à contextualização, à possibilidade de conexões com outras áreas do conhecimento)?

1.4. *Ambiente de aprendizagem*

Urge rompermos o ambiente hegemônico (aulas centradas no professor, alunos passivos a ideias prontas, grades curriculares rígidas, extensas, lineares, descontextualizadas etc.) onde se desenvolve o ETM e buscarmos, caminhar, navegar, testar, transitar por outros ambientes de aprendizagem que propiciem ao aluno, antes de qualquer coisa, o prazer de investigar para produzir novos saberes e, com isso, construir conhecimento.

O ambiente hegemônico a que nos referimos é aquele onde o professor não se preocupa em associar os conceitos matemáticos a quaisquer outras áreas do conhecimento, como por exemplo, à Física (usar a ideia das funções temporais de distância percorrida e velocidade para falar respectivamente em função quadrática e função linear, por exemplo), ou à Biologia, ou à Geografia, (associar dinâmica populacional – de bactérias, insetos, pessoas – à progressão geométrica e esta a função exponencial). Nesta referência há uma preocupação de se ensinar a Matemática para e pela Matemática, exclusivamente. As consequências disso nos leva ao encontro do que *Paulo Freire*, em seu clássico, *Pedagogia do Oprimido* classifica de uma educação bancária, oca, descontextualizada, não comprometida com a vida, ou melhor, com quaisquer possíveis intervenções que se possam desestabilizar a inercia educacional vigente no ETM, muito menos desestabilizar, consequentemente o sistema político que se perpetua. No que se refere ao ensino da Matemática, permanecer nesse ambiente é perpetuar o *ergon* ou o *opus*; isto é, apenas o trabalho realizado, pronto e acabado desconsiderando o processo. Somente o resultado interessa (aprovado ou não, apto ou não à sociedade de consumo).

Que professor de Matemática nunca se deparou com um exercício em que ficasse agarrado por horas e após diversas tentativas chegasse, ou não, a uma solução? Com o furor pedagógico inabalável tal professor vai à aula e apresenta tão-somente o produto final, fruto de árduas horas de trabalho. Essa solução é a síntese do que fora produzido (o *ergon* ou o *opus*). O processo que desencadeou tal produto foi para lixeira em forma de dezenas de folhas de papel rabiscadas e amaçadas. A solução sintetizada do referido exercício, focando o *ergon*, diante de seus alunos, o eleva ao pedestal da sabedoria e da erudição, ainda mais quando o mesmo resolve bradar: “isso é trivial!”.

O processo que levou a tal conclusão é que é frutífero à aprendizagem. A arte está no desenvolvimento, na batalha, nas tentativas e erros. Mas com o propósito de ser didático, tal professor, restringiu-se ao *opus*. Tal como Arquitas, por mais que pensemos no movimento (assim como na Astronomia e na Música) esse professor reduziu sua prática ao estático, pois o processo foi excluído.

No modelo do ETM há uma ordem curricular mantida – rígida e imutável. Por exemplo, na 1ª série do Ensino Médio usualmente se ensina primeiramente “*a definição*” de conjunto, depois “*a definição*” de relação, depois “*a definição*” de função, depois “*as definições*” pertinentes aos tipos de funções que os autores julgam compatíveis à Educação Básica etc. Após cada “*definição*” são apresentadas as respectivas propriedades e depois exercícios. Assim, todas as aulas são reduzidas a uma rígida estrutura de se ensinar Matemática.

Definição → **Propriedades** → **Exemplos** → **Exercícios**

Quadro 1: A linearidade do ambiente vigente no ETM.

Essa estrutura (Cf. Quadro 1) juntamente com ambiente de aprendizagem que privilegia o *ergon* ou o *opus* é denominada de *paradigma do exercício* e é apresentado em Skovsmose (2000, p. 75) e Chaves (2004, p. 76-77). Tal ambiente é deveras peculiar, pois a maioria das aulas de Matemática, ao longo dos tempos, se processa homileticamente segundo tal paradigma. Aprendemos e ensinamos do mesmo jeito que aprendemos. A repetição desse jeito de ensinar muito mais do que enrijecer e manter uma ordem curricular impossibilita mudanças e alimenta alguns mitos nocivos às nossas expectativas como educadores. É o *efeito Dolly* ou *clonagem acadêmica* que se perpetua e reproduz os iguais (CHAVES, 2004, p. 186). Alimenta, por exemplo, mitos como: "*Matemática é difícil*", "*Quem sabe Matemática é inteligente*", donde se conclui que "*Quem não sabe não é inteligente*", "*Sou professor de Matemática e não de História por isso não vou dar ênfase a essa parte do livro*" etc.

Também a linearidade proposta no quadro 1 possibilita o entendimento de que o processo de ensino leva a uma aprendizagem que se dá de forma linear e evolutiva. Evolutiva pode ser, mas se for entendida como transformação, transvalorização, jamais como suavemente ascendente. Transvalorizar-se implica em romper com verdades que se possui. Como apresenta Chaves (2004) ao discutir o conhecimento em Nietzsche: "é preciso romper com aquilo que se pensa que sabe para construir conhecimento". É preciso zombar, tripudiar, romper com verdades cristalizadas. E isso o aprendizado se dá a partir de sucessivas rupturas que tornam a trajetória não retilínea, muito menos estritamente ascende. O processo é oscilatório. Por isso aprende-se bem mais a partir dos erros do que dos acertos.

A necessidade de manutenção da rigidez curricular justifica-se por ser tal rigidez um dispositivo de controle. Além da ordem curricular podemos destacar como dispositivo de controle as aulas expositivas, centradas no professor (agente responsável por manter o sistema – o propagandista) reduzindo o aluno a um elemento passivo, mero espectador (agente receptor das propagandas – o consumidor).

Dessa forma, o ambiente denominado *paradigma do exercício* se configura como lugar-comum onde se desenvolve o ETM: apresentado através de aulas expositivas, descontextualizadas, com referência exclusiva à Matemática, centrada somente no discurso do professor, que replica o discurso do livro pronto a ser consumido, como uma programação curricular que não permite a experimentação, com a investigação, com a *trans*, com a *multi* ou *pluri* e a *interdisciplinaridade*[9]. Mantendo-se tal regime de verdade, o do *paradigma do exercício*, o aluno assume uma postura de passividade, sujeitando-se a vontades que não são suas. Este Ambiente privilegia a Matemática (com formalismo exacerbado) e esta passa a ser imutável, incontestável, venerada, descompromissada com a vida e com as formas de exaltá-la e representá-la, como as Artes, por exemplo.

2. Justificativa

2.1. *Um possível entendimento a respeito de nossa proposta*

Ao longo desta oficina apresentaremos uma dinâmica e não um produto didático ou um material didático pedagógico (MDP) e solicitamos que não entenda essa dinâmica tão-somente como um produto (*ergon* ou *opus*), mas um processo de capacitação para o ensino de Matemática que toma como base um referencial teórico que se contrapõe ao dispositivo tático do ETM, o *paradigma do exercício* e seus dispositivos de controle. Esse processo é destinado àqueles que queiram romper com tal ambiente e buscam um ambiente investigativo a partir da História da Matemática e da Arte, bem como de instrumentos manipulativos que privilegiem a ação (a dinâmica) no lugar do produto (o *ergon* ou o *opus*).

[9] Entenderemos como *pluri* ou *multidisciplinar* a justaposição de várias disciplinas sem nenhuma tentativa de síntese. Segundo Weril; D'Ambrosio: Crema (1993) esse é o modelo predominante nas universidades francesas. Quando nos referimos à *interdisciplinaridade* levamos em conta a síntese de duas ou mais disciplinas, com foco em uma nova ordem do ordem, caracterizada por novas enunciações descritivas e novas relações estruturais. Por *transdisciplinar* tomaremos como o reconhecimento da interdependência de todos os aspectos de uma dada situação a ser estudada, que vai além dos códigos e enunciações típicos de uma disciplina, buscando assim uma visão holística a respeito do problema.

Nossa expectativa é que essa prática seja entendida como uma ferramenta pedagógica – de reflexão de nossas práticas docentes – que sirva como um elemento norteador na elaboração de planos e roteiros de atividades que coloquem o aluno como ator e coautor de um processo investigativo.

É relevante não perdemos de vista os motivos pelo qual tal dinâmica será apresentada. Convidamos-lhes a entendê-la como ***um*** – e não ***o*** – referencial; ***um*** subsídio à capacitação de professores de Matemática, de maneira que os mesmos possam trabalhar de forma integrada, participativa e colaborativa com demais professores de outras áreas do conhecimento no desenvolvimento de temas que sejam substanciais à formação do indivíduo, como ser reflexivo, sobretudo sobre suas próprias atitudes.

Ao longo deste texto abordaremos padrões; sobretudo, numéricos e geométricos, pois entendemos que é peculiar ao ser humano, bem como a outros animais – os corvos[10], por exemplo – avaliar, analisar e comparar padrões, mas um padrão não é um olhar universal. Há padrões e depositar um olhar a respeito de uma obra de Arte, de um foco em relação à natureza ou na leitura de um texto, é peculiar a cada indivíduo que tomará como referência sua trajetória, seu entendimento de mundo, suas concepções e regime de verdades da qual está comprometido ou tomado. Daí a relevância de realizarmos uma arqueologia a respeito de padrões tomados pela História da humanidade.

> Ao longo da história, número e números têm tido uma grande influência na nossa cultura e na nossa linguagem. Há muitas palavras associadas aos números, por exemplo, bicicleta tem duas roas, um tripé tem três pés, um octogenário já viveu 8 décadas, etc. A história dos números começa antes da nossa própria história. Certas aves são capazes de se aperceber se foi retirado algum ovo do seu ninho. Provavelmente terão uma ideia primária sobre o número de ovos que lá deveria estar. Dantzig descreve uma experiência em que os corvos reconhecem até quatro homens (SILVA; PENA, 2014, p.4)

[10] Dantizg (1970, apud: Brasil, 2014, p.7) afirma que alguns animais também possuem senso numérico, mesmo que rudimentares e restritos, como o caso específico do corvo que consegue identificar se são retirados dois ou mais ovos de seus ninhos.

2.2. O porquê Leonardo Da Vinci[11]:

> "*A massificação procura baixar a qualidade artística para a altura do gosto médio. Em arte, o gosto médio é mais prejudicial do que o mau gosto... Nunca vi um gênio com gosto médio*".
> (ARIANO SUASSUNA)

Nossa (orientando e orientador) sede e curiosidade por conhecimento levam-nos a refletir a respeito de diversos aspectos da vida e obras de Leonardo. Até onde estudar tal cientista nos proporcionará ricos saberes para nossa formação acadêmica? Há padrões matemáticos em obras de Da Vinci? Quais? Ele optou por utilizá-los ou é tão-somente uma forma de modelarmos (ou efetuarmos leituras de) suas obras? Diante de tais perguntas motivamo-nos a escrever este trabalho.

Se tivéssemos que resumir nosso fascínio pelo tema em apenas uma frase, escolheríamos:

> O homem é único não porque produz ciência, e ele não é único porque produz arte, mas sim porque ciência e arte, igualmente, são expressões da maravilhosa plasticidade de sua mente. (WHITE, 2002, p. 15)

---

[11] Leonardo da Vinci (15/04/1452 — 02/05/1519), artista renascentista italiano. Há dúvidas a respeito de onde nascera. Para alguns historiadores foi em Anchiano, enquanto para outros, foi numa cidade, situada às margens do rio Arno, perto dos montes Albanos, entre as cidades italianas de Florença e Pisa. Foi um dos mais importantes pintores do Renascimento Cultural. Considerado um gênio, pois se mostrou um excelente anatomista, engenheiro, matemático músico, naturalista, arquiteto, inventor e escultor. Seus trabalhos e projetos científicos quase sempre ficaram escondidos em livros de anotações (muitos escritos em códigos), e foi como artista que conseguiu o reconhecimento e o prestígio das pessoas de sua época.

Leonardo Da Vinci consegue realizar tal façanha, juntar ciência com Arte, conseguiu manipular a beleza de suas criações utilizando artífices científicos e, em contrapartida, tornou seus estudos científicos de beleza insofismável aos olhos doutrem, utilizando a Arte. Juntou a curiosidade de aprender com o prazer de criar, resultando em obras de significados extremamente importantes ao desenvolvimento de estudos de outros cientistas de sua e de épocas futuras, produziu obras com significados claros e ao mesmo tempo conseguiu elaborar objetos enigmáticos, que até aos dias contemporâneos iludem e deslumbram de uma maneira fantástica, mentes e mais mentes, pensadores e mais pensadores.

Assim, nosso objetivo não é estudar toda a vida de Leonardo Da Vinci, mas sim relatar alguns pontos da vida desta figura humana ímpar, bem como analisar, identificar e apresentar a possível existência de padrões matemáticos em três de suas mais conhecidas obras − a *Mona Lisa*, a *Dama do Arminho*, a *Dama do Ramalhete* e o *Homem Vitruviano* − por serem obras que aparecem com frequência em livros didáticos.

Em alguns livros didáticos a sequência de Fibonacci é apresentada de uma maneira bem simples, geralmente através do clássico problema da reprodução dos coelhos (assim como o faremos posteriormente) quando estudam sequências numéricas e seus padrões. Então é válido o comprometimento de estudar a presença ou não da sequência de Fibonacci nas obras supracitadas de Da Vinci; bem como a razão áurea, o número de ouro e a espiral logarítmica por estarem profundamente interligadas à sequência de Fibonacci (como veremos adiante). Portanto, propomos não colocar em lados opostos de uma mesma balança, mas misturar em uma mesma panela, Arte e Matemática em nosso objeto de estudo de maneira concisa, tendo em vista que este estudo possa proporcionar contribuições para aulas de Matemática estabelecendo, como já afirmamos, relações *inter* ou *trans* ou *pluri* ou *multidisciplinares.*

3. Discutindo academicamente o processo no trânsito da Matemática à Arte

3.1. *Uma arqueologia da Geometria grega*

Tomemos como ponto de partida algumas linhas para discutirmos um pouco a respeito de uma possível gênese da Geometria, de Pitágoras e dos pitagóricos.

Caraça (1989), ao discutir as relações entre a operação de medição, propriedade privada e Estado, exalta Heródoto[12] ao escrever a respeito da História dos egípcios em seu livro II (Euterpe), das suas Histórias, e refere-se à Geometria da seguinte maneira:

> Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e rectangular de terra, com a obrigação de pagar por um ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos. (CARAÇA, 1989, p. 32) (ipsis verbis).

A mesma obra destaca ainda que a necessidade de expressão numérica para medição advém das relações do indivíduo para com o Estado, com base na propriedade e na cobrança de tributos, chamando atenção para o fato de que Sesóstris viveu há mais de 4.000 anos. Observemos que dessa forma a gênese do problema da Geometria está presente em relações socioambientais, socioculturais e socioeconômicas. Para os egípcios e babilônios não havia um culto à Matemática como para os gregos. Eles a tomavam como ferramenta de resolução de problemas práticos. Tanto que:

> Pode-se dizer, parece que sem qualquer sombra de dúvida, que o conhecimento matemático tanto egípcio quanto o babilônico – este, sabemos hoje graças ao trabalho de Otto Neugebauer, bem mais refinado do que aquele – tinha a experiência como critério de verdade.
>
> Os gregos herdaram, assim nos diz a tradição, tal conhecimento. Mas, o que satisfazia egípcios e babilônios não bastou para contentar a exigência grega. Com

[12] Heródoto (485? a 420 a.C.), geógrafo e historiador grego, considerado pai da História, nascido em Halicarnasso, foi autor da história da invasão persa da Grécia nos princípios do século V a.C., conhecida simplesmente como *As Histórias de Heródoto*. Esta obra foi reconhecida como uma nova forma de literatura pouco depois de ser publicada.

> os matemáticos da Grécia, a razão suplanta e *empeiria* como critério e verdade e a matemática ganha características de uma ciência dedutiva. (BICUDO, 2009, p. 77).

Tais relações com a Matemática (mística para os gregos e prática para egípcios e babilônios) podem ser observadas também no seguinte texto:

> Os autores gregos não deixaram de manifestar seu respeito pela sabedoria oriental, e essa sabedoria era acessível a todos que pudessem viajar ao Egito e à Babilônia. Há também evidências internas de uma conexão com o Oriente. O misticismo grego primitivo em matemática deixa transparecer uma forte influência oriental e escritos gregos mostram uma perpetuação helênica da tradição mais aritmética do Oriente. Há também fortes elos ligando a astronomia grega à Mesopotâmia. (EVES, 2004, p.96)

Chaves (2004), ao tratar de uma das técnicas de rejeição do discurso, atenta para o fato de que, se por um lado Pitágoras atraiu muitos adeptos e fora merecedor de muitos comentários pelos seus feitos como geômetra, por suas concepções filosóficas, pelo conteúdo aritmético de sua doutrina, ou ainda por suas ambições políticas[13], por outro lado, o mesmo atraiu muitos desafetos, principalmente Policrates – o tirano de Samos – e Cílon[14] (que acabou apropriando-se do seu livro secreto *A palavra Sagrada – Hirós logos* − e expôs à multidão trechos da obra roubada, demostrando que o catecismo religioso dos pitagóricos atentava contra a liberdade). Além disso, a credibilidade de Pitágoras também fora colocada à prova quando da crise da incomensurabilidade, visto que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas *incomensuráveis* e, para a doutrina pitagórica:

> [...] tudo é número”, ou seja, tudo podia ser explicado através dos números (inteiros) e suas razões (números racionais). Acreditava-se também que dados dois segmentos quaisquer eles eram sempre ***comensuráveis***, i.e., que existia um terceiro segmento, menor que os dois primeiros, tal que cada um deles era múltiplo inteiro do menor. Em termos modernos, se *a* e *b* são os comprimentos

---

[13] Segundo Schuré (1962 – apud Chaves, 2004, p. 38), Pitágoras queria “...à frente do Estado um governo científico, menos misterioso, mas colocado tão alto como o sacerdócio egípcio [...] Para ele, saber é poder.”. Paradoxalmente, talvez seja este um vestígio da gênese do mito positivista da cientificidade (que sustenta que o saber gera poder), da ideologia da competência (de que quem sabe mais pode mandar e a quem não tem conhecimento cabe obedecer), mas também a negação do mito da neutralidade dos homens do conhecimento.

[14] Para saberem mais a respeito do comportamento de Cílon e como o mesmo entrou para História, levando a Escola pitagórica ou Itálica às ruínas também sugerimos CONTE, Carlos Brasílio. *Pitágoras*: *ciência e magia na Antiga Grécia.* São Paulo, Masdras, 2008, p. 89-91.

> dos dois segmentos, então existe um segmento de comprimento *c* e dois inteiros *m* e *n* tais que $a = mc$ e $b = nc$. Daí conclui-se que $a/b = m/n$. Muitas das demonstrações à época eram baseadas neste fato. (MOREIRA & CABRAL, 2011, p. 35)

Consideremos, pois, o que Eves (2004, p. 103) denomina de unânime tradição, com atribuição a Pitágoras da, "descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos hoje universalmente conhecido pelo seu nome – que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos." (ipsis verbis).

Eis que surge o problema! Qual o valor da diagonal de um quadrado de lado medindo uma unidade de medida linear qualquer? Prontamente, se realizássemos tal pergunta a um aluno do 9º ano do Ensino Fundamental, é bem provável que diria $\ell\sqrt{2}$, quiçá argumentaria que tal resultado é consequência imediata do teorema de Pitágoras[15]. O que dizer se $\sqrt{2}$, bem como os demais irracionais, não era na época conhecido para os gregos? Como veremos mais adiante, tal crise (a dos *incomensuráveis*) graças a Cílon e seu forte poder argumentativo, surge a partir do que poderíamos considerar senão uma das maiores construções da humanidade, pelo menos a mais popular.

Mas Pitágoras não era apenas geômetra. Além de místico também se dedicava a estudar os números − que para muitos seus estudos deu origem à teoria dos números e para outros limitou-se a praticar uma Aritmética mística. Vejamos alguns de seus feitos em relação a tal área.

3.1.1. Ternos de números pitagóricos

[15] O teorema de Pitágoras é apresentado na proposição 47, Livro I, de *Os Elementos*, de Euclides: *Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto*. (BICUDO, 2009, p.132). Bem como o seu recíproco (proposição 48, Livro I): *Caso o quadrado o quadrado sobre um dos lados de um triângulo seja igual aos quadrados dos dois lados restantes do triângulo, o ângulo contido pelos dois lados restantes do triângulo é reto.* (BICUDO, 2009, p.134).

O problema dos ternos pitagóricos consiste em determinar uma tríade de números inteiros positivos que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Se for uma verdade histórica ou não o que vamos tratar, não importa; afirmar que os triângulos de lados proporcionais a 3, 4 e 5 constituem-se como uma verdade aritmética ou até mesmo didático-pedagógica, visto que não há professor que deixe de referenciar tais triângulos como pitagóricos ou retângulos egípcios. Daí surge aquela velha estória de que Pitágoras observara em suas viagens ao Egito que os construtores adotavam cordas de 3, 4 e 5 nós equidistantes, bem como seus respectivos múltiplos para obterem um ângulo reto. Assim, partindo dessa verdade, podemos estabelecer a seguinte tabela:

Tabela 1 – Ternos numéricos formadores de triângulos pitagóricos ou retângulos egípcios.

Cateto	Cateto	Hipotenusa
3	4	5
6	8	10
9	12	15
12	16	20
15	20	25

Fonte: https://sites.google.com/site/mat5semestre/numeros-pitagoricos

No entanto, pouco se fala, pelo menos nas salas de aula do Ensino Básico, a respeito de outros números pitagóricos que não os múltiplos respectivos de 3, 4 e 5. Vejamos:

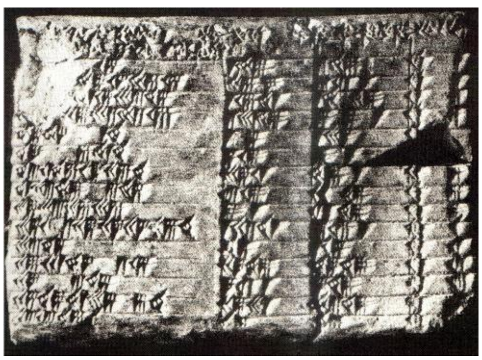
Tabela 2 – Outros ternos de numéricos pitagóricos.

Cateto	Cateto	Hipotenusa
5	12	13
10	24	26
20	48	52
25	60	65
30	72	78

Fonte: https://sites.google.com/site/mat5semestre/numeros-pitagoricos

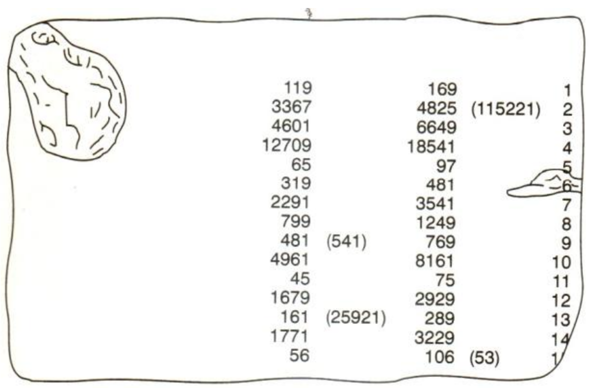
É perceptível, ou não, que $(3^2 + 4^2 = 5^2)$ e $(5^2 + 12^2 = 13^2)$. O mesmo ocorre para cada terno de números encontrados nas linhas das tabelas 1 e 2, levando em consideração que o quadrado do maior valor é a soma do quadrado dos dois menores. Quando um terno de números naturais possui como único fator inteiro positivo comum aos elementos do terno pitagórico, a unidade, então o terno é denominado de pitagórico primitivo. Assim (3, 4 e 5) ou (5, 12 e 13) são ternos pitagóricos primitivos enquanto (6, 8 e 10) ou (10, 24 e 26) etc. são ternos pitagóricos não primitivos.

Produzir tabelas numéricas não é invenção da era moderna. Tábuas matemáticas babilônias escritas no período de 1900 a 1600 a.C., como a conhecida *Plimpton 322*[16] já cunhavam dados numéricos (Cf. figura 1).



Fonte: (EVES, 2004, p. 65)

Figura 1: *Plimpton 322* (Universidade de Colúmbia).



Fonte: (EVES, 2004, p. 64)

Figura 2: Reprodução da tábua *Plimpton 322* em nossa notação decimal.

Se bem observarmos a figura 1, a tábua contém três colunas (reproduzidas em notação indo-arábica decimal na figura 2 para que possamos compará-las). Nas figuras 1 e 2, a coluna da extrema direita é tão-somente uma relação de ordem para as linhas. “Os números correspondentes dessas colunas, com quatro infelizes exceções (anotadas na figura 2 entre parênteses – grifo nosso) constituem a hipotenusa e um cateto de triângulos retângulos de lados inteiros.” (EVES, 2004, p.64). A obra citada sugere que não é fácil

[16] Segundo Eves (2004, p. 63), o nome refere-se a G.A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, Os primeiros a descreverem seu conteúdo foram O. Neugebauer e Sachs em 1945, mas Jöran Friberg, apresentou, em *Historia Mathematica*, 8, n. 3, agosto de 1981, p. 277-318, um estudo mais detalhado, denominado *Methods and traditions of Babylonian mathematics*.

explicar a exceção da segunda linha da tabela (Cf. figura 2) e para tal propõe que se vá a J. Gillings, *The Australian Journal of Science*, 16, 1953, p. 34-36 ou a Otto Neugebauer, *The exact sciences in antiquity,* 2ª ed. 1962. Assim, uma análise da tábua *Plimpton 322* oferece evidências razoavelmente convincentes de que os babilônios antigos sabiam como calcular esses ternos. (GUERATO, 2014).

Ao analisarmos as tabelas 1 e 2, antecedentes, bem como as figuras 1 e 2 observaremos que perpassa a História das civilizações o interesse de obter um terno de números naturais que mantenham entre si a relação pitagórica: ($3^2 + 4^2 = 5^2$) e ($5^2 + 12^2 = 13^2$); ($6^2 + 8^2 = 10^2$) e ($10^2 + 24^2 = 26^2$); ($9^2 + 12^2 = 15^2$) e ($15^2 + 36^2 = 39^2$); ... Contudo, é sabido que o teorema atribuído a Pitágoras já era conhecido pelos babilônios, como se constata a seguir:

> Na época em que se acreditava na 'geração espontânea' das culturas, a idéia do 'milagre grego' apaixonou várias gerações de investigadores, continuamente, até há menos de cinqüenta anos, a partir do impulso entusiasta do Renascimento. Mas depois das investigações de Thureau-Dangin[17], Neugebauer[18] e Bruins[19] sabemos que mil anos antes de Pitágoras e Euclides[20], os babilônios já conheciam o célebre teorema, haviam desenvolvido e resolvido os 'problemas de Diofanto[21]', conheciam a fórmula de Gnomon[22], atribuída a Pitágoras, bem como

---

[17] THUREAU-DANGIN: *Textes mathématiques bobilonienes.* Leiden, 1938.

[18] NEUGEBAUER, O.: *The exact sciences in antiquity.* Providence (RhI) 1957.

[19] BRUINS, E.M.: *Nouvelles Découvertes sur les Mathématiques babiloniennes.* Paris, 1952.

[20] Pouco sabemos a respeito de Euclides (± 330 a.C. − ± 260 a.C.) que, para alguns, nasceu na Síria e estudou em Atenas. As principais referências a seu respeito foram escritas por Proclo (412 d.C. − 485 d.C.) e Pappus de Alexandria (290 d.C. − 350 d.C.). Tido como um dos primeiros geômetras, reconhecido como um dos matemáticos mais notórios da Grécia Clássica e de todos os tempos. É sabido, por exemplo, que lecionou Matemática na escola criada por Ptolomeu Soter (306 a.C. − 283 a.C.), em Alexandria, mais conhecida por "Museu", local onde galgou grande prestígio pela forma como lecionava Geometria e Álgebra, atraindo para as suas lições um grande número de discípulos. Proclo apresenta Euclides apenas brevemente no seu *Comentário sobre os Elementos*, escrito no século V, onde escreve que Euclides foi o autor de *Os Elementos*, que foi mencionado por Arquimedes e que, quando Ptolomeu I perguntou a Euclides se não havia caminho mais curto para a Geometria que *Os Elementos*, ele responderá que não há estrada real para a Geometria.

[21] Sugerimos cmup.fc.up.pt/cmup/mcsilva/HMTP8.pdf e https://m.facebook.com/story.php?story_fbid=343708272446841&id=100004230122582

[22] *Gnomon* é a parte do relógio solar (agulha no formato de um triângulo retângulo) que possibilita a projeção da sombra. Heródoto relata que os babilônios foram os inventores, mas que foi Anaximandro de Mileto que ocidentalizou tal conhecimento. Uma distribuição em linhas ou segmentos com configuração em

> a fórmula de Heron, para uma raiz irracional. Em outros termos, tal como o diziam os gregos – e contra a opinião dos historiadores do século XIX – a matemática grega foi simplesmente a continuação de uma matemática abstrata amplamente desenvolvida que floresceu mais de mil anos antes do milagre grego. (LOPEZ, 1978, p. 143). (ipsis verbis) (NRP 19 e 20 são grifos nossos)

Eves (2004) também trata da questão da unanimidade da atribuição a Pitágoras, mas também não deixa de apresentar a ressalva de que os babilônios já tratavam do assunto:

> Já vimos que esse teorema era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi[23], mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras. Muitas conjecturas têm sido feitas quanto à demonstração que Pitágoras poderia ter dado, mas ao que parece foi uma demonstração[24] por decomposição [...] (EVES, 2004, p. 103). (NRP 19 – grifo nosso)

Observemos as figuras a seguir:

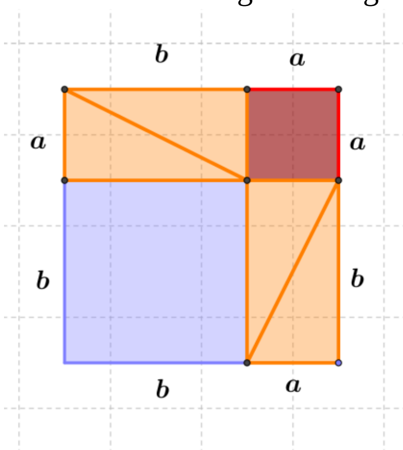


Figura 3: Quadrado de lado $a + b$

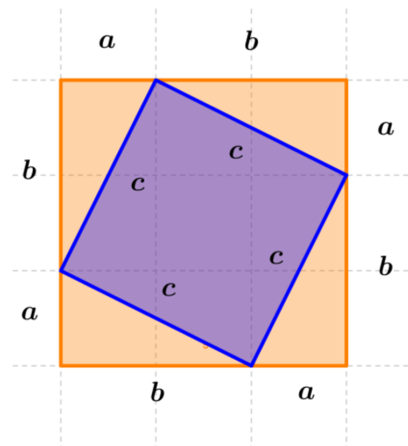


Figura 4: Quadrado de lado $a + b$

Sejam a, b e c respectivamente os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo (Figura 4). O quadrado da figura 3 é decomposto em seis partes: um quadrado de área a^2; um quadrado de área b^2; quatro triângulos retângulos de área $ab/2$. O quadrado de lado (a +

---

forma de ângulo reto denomina-se *gnomon*. Consultar: http://www.sitedecuriosidades.com/curiosidade/a-historia-do-relogio-de-sol-gnomon.html. e http://nrich.maths.org/776.

[23] Hamurabi, Hamurábi ou Hammurabi, nasceu em 1792 a.C. e faleceu em 1750 a. C., foi o sexto rei da primeira dinastia babilônica. Durante seu reinado conquistou a Suméria e Acádia, tornando-se o primeiro rei do Império Paleobabilônico (Iraque).

[24] Ver, porém, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, vol. 1, p. 124-125, de Daniel Shanks.

b) da figura 4 é decomposto em cinco partes: um quadrado de área c^2 e quatro triângulos retângulos de área $ab/2$. Tomemos as duas figuras (figuras 3 e 4) e subtraiamos partes iguais (congruentes – áreas equivalentes) de partes iguais (congruentes – áreas equivalentes), nas figuras de áreas correspondentes. Vejamos que sobrarão os quadrados de áreas a^2, b^2 e c^2. Donde se conclui que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores.

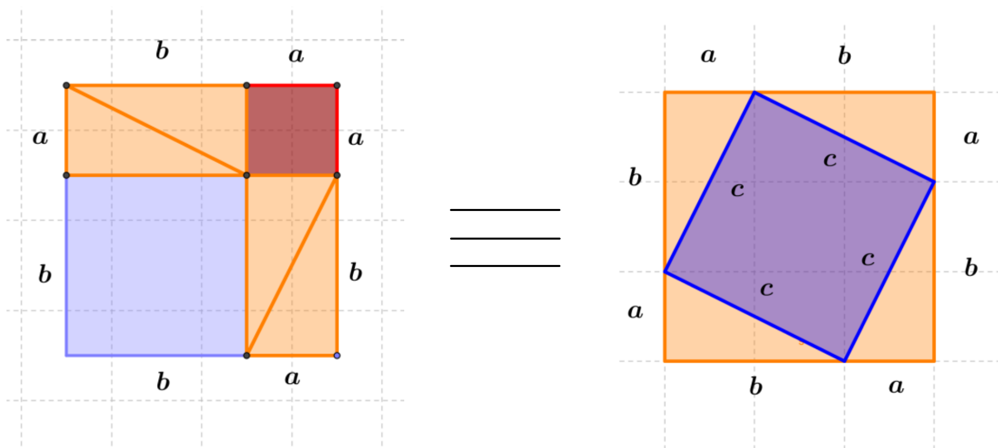


Figura 5: Quadrado de lado congruentes de áreas $(a + b)^2$

No esquema que apresentamos na figura 5, mostramos que os quadrados possuem áreas equivalentes e ambos têm lados medindo $(a + b)$. Se retirarmos as partes iguais (congruentes), das figuras 3, 4 ou 5, ficaremos com:

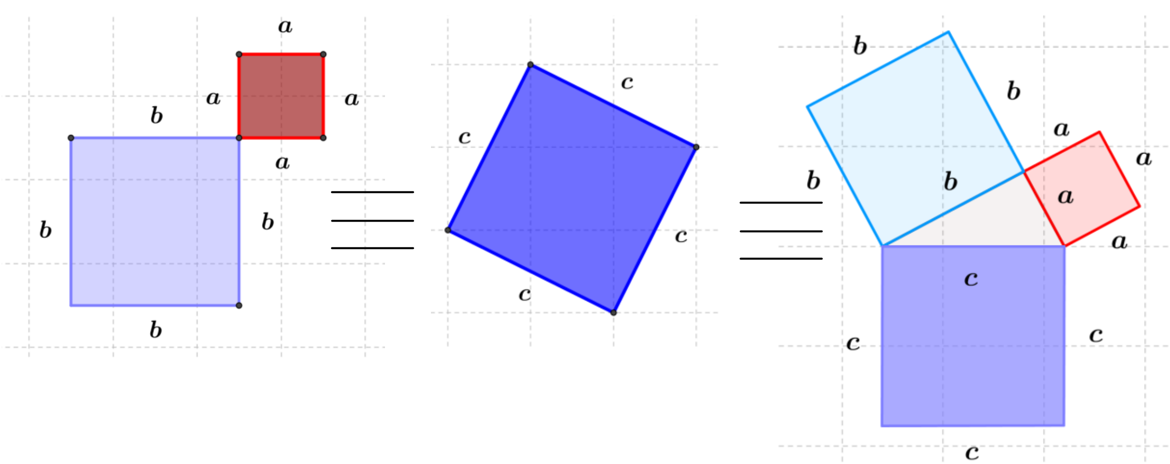


Figura 6: Quadrado de áreas congruentes: $a^2 + b^2 = c^2$

No entanto, para provarmos que a parte central da segunda decomposição (figura 6) é efetivamente um quadrado de lado *c*, Eves (2004) nos lembra de que:

> [...] precisamos usar o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo retângulo é igual a dois ângulos retos. Mas o *Sumário Eudemiano*[25] atribuiu esse teorema sobre triângulos em geral aos pitagóricos. E como uma demonstração desse teorema requer, por sua vez, o conhecimento de certas propriedades sobre retas paralelas, credita-se também aos pitagóricos o desenvolvimento dessa teoria. (EVES, 2004, p. 104).

Bongiovanni (2014) destaca que a demonstração supracitada (figuras 5 e 6) parte da premissa de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo equivale a dois retos e, portanto, desse fato decorre que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é equivalente a quatro retos. Assim, se um quadrilátero possui três ângulos retos então o quarto ângulo será também reto; donde se conclui também que existem retângulos e quadrados. Portanto a prova convincente do teorema de Pitágoras apresentada nas figuras 5 e 6 apresenta hipóteses "escondidas", tendo como ponto nevrálgico que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo equivale a dois retos. Esta proposição apresentada em *Os Elementos*[26], no livro I de Euclides (proposição 32)[27]

[25] O *Sumário Eudemiano* de Proclo contém um breve resumo do desenvolvimento da Geometria grega desde seus primeiros tempos até Euclides. Proclo Lício, também conhecido por Proclo Diádoco, foi um filósofo neoplatônico do século V. Nascido em 8 de fevereiro de 412 d.C., Constantinopla, Turquia, morreu em 17 de abril de 485 d.C., Atenas, Grécia. Estudou na Academia Platônica. Proclo teve o mérito de desenvolver a corrente de pensamento baseada em Platão, iniciada por Plotino e depois expandida por Porfírio e Jâmblico. Mesmo vivendo no século V d.C., teve acesso a muitos trabalhos históricos e críticos que se perderam, salvo alguns fragmentos preservados por ele próprio e outros. Mais informações em Guerato (2014).

[26] A obra *Os Elementos*, atribuída a Euclides, é uma das mais influentes na História da Matemática. Nela, os princípios − do que se denomina de Geometria Euclidiana − foram deduzidos a partir de um pequeno conjunto de axiomas. É composta por treze volumes, sendo: cinco sobre Geometria Plana; três sobre números; um sobre a teoria das proporções; um sobre *incomensuráveis*; três (os últimos) sobre Geometria no Espaço. Escrita em grego, essa obra cobre toda a Aritmética, a Álgebra e a Geometria conhecidas até então no mundo grego, reunindo o trabalho de seus predecessores, como Hipócrates e Eudóxio, Euclides sistematizou todo o conhecimento geométrico dos antigos, intercalando os teoremas já então conhecidos com a demonstração de muitos outros, que completavam lacunas e davam coerência e encadeamento lógico ao sistema por ele criado. Após sua primeira edição foi copiado e recopiado inúmeras vezes, tendo sido traduzido para o árabe em (774). A obra possui mais de mil edições desde o advento da imprensa, sendo a sua primeira versão impressa datada

depende do famoso e discutido quinto postulado de Euclides. Aliás, a discussão do quinto postulado[28] de Euclides é contundente para observarmos que nem toda crise leva à incredibilidade. Foi na tentativa milenar de provar que o quinto postulado estava errado, que outras Geometrias foram desenvolvidas (como, por exemplo, a esférica e a hiperbólica[29]).

---

de 1482 (Veneza, Itália). Essa edição foi uma tradução do árabe para o latim. (http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/euclides.htm)

[27] *Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos.* (BICUDO, 2009, p.122)

[28] "*E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado do qual estão os menores do que dois retos.*" (BICUDO, 2009, p. 98).

[29] Credita-se o surgimento da Geometria Não-Euclidiana aos matemáticos Bolyai e Lobachevsky's. Em 1829, Lobachevsky's publicou um trabalho, desenvolvido na Rússia, a respeito de sua descoberta da Geometria Não-Euclidiana. A contribuição de Bolyai e de Lobachevsky's foi descobrir que era possível alterar o axioma das paralelas (5º postulado de Euclides) sem que uma contradição fosse criada com os outros axiomas. Tal fato vem a ser a gênese de uma Geometria Não-Euclidiana, denominada de Geometria Hiperbólica. Nessa época, as diferenças entre essas Geometrias, a Euclidiana e a Hiperbólica, eram meramente formais; isto é, os respectivos conjuntos de axiomas distinguiam-se. Ou seja, não havia um modelo concreto para a Geometria Hiperbólica, uma representação gráfica para os objetos geométricos, como, por exemplo, para uma reta hiperbólica, como afirma Doria (2014, p.4). O primeiro modelo para a Geometria Hiperbólica foi criado por Eugenio Beltrami (1835-1900). A Geometria Esférica fora objeto de estudo devido aos problemas de navegação e os objetivos neste caso eram meramente computacionais. (http://www.bienasbm.ufba.br/M32.pdf)

Figura 7: Um dos mais antigos fragmentos sobreviventes de *Os Elementos* de Euclides, encontrado entre os *Papiros de Oxirrinco*[30] e datado de cerca de 100 d.C. O diagrama acompanha o Livro II, Proposição 5.

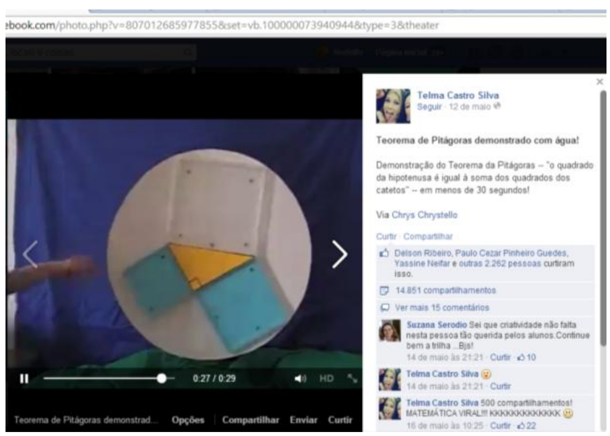
Loomis (1968)[31] coletou e classificou 370 demonstrações do teorema de Pitágoras e Santos; Silva; Lins (2012) o cita e chama atenção para o fato de que a demonstração por decomposição é uma prova experimental, do tipo geométrico, do teorema de Pitágoras e permite a participação do aluno na construção do material concreto (MDP feito de EVA, por exemplo) como também na (des)montagem do quebra-cabeça. Segundo tal referencial, "a interação do aluno com este tipo de demonstração permite despertar o seu interesse e aguçar a sua criatividade, tornando-o um agente ativo na construção do seu conhecimento.". Acrescentamos também que essa interação contribui para rompermos com a inércia que se põe a partir do ambiente de aprendizagem do *paradigma do exercício*. Pensamos também que a interação sugerida faculta que se trabalhe com ambientes que perpassam os cenários para investigação.

Visitar a História da Matemática para entender processos e como pensavam e se portavam diante de certas circunstâncias nossos ancestrais, como dissemos anteriormente, é salutar, mas também podemos partir daí para outras questões, como o que se pode verificar na proposta contida na figura 8 a seguir que aborda a questão da soma dos volumes. O recurso midiático em curso faculta leituras que não ficam no campo da demonstração ou da verificação, mas da observação, possível experimentação e, sobretudo discussão, pois para que o resultado obtido seja confiável e aceitável há de se manter a altura dos prismas

[30] Os *Papiros de Oxirrinco* (ou *Oxyrhynchus Papyri*) são um grupo de manuscritos, a maioria em papiro, descoberto num antigo depósito de lixo perto de Oxirrinco. Os manuscritos datam dos séculos I ao VI d.C. e incluem milhares de documentos em grego e em latim, cartas e obras literárias. Os papiros da coleção se dispersaram e estão atualmente alojados pelo mundo todo. Uma quantidade substancial encontra-se no *Ashmolean Museum* na Universidade de Oxford.

[31] A primeira edição, publicado em 1927, apresenta 230 demonstrações do teorema em um único livro. Em 1940 saiu uma segunda edição, renovada, já com 370 demonstrações. Esse material é um interessante referencial teórico que possibilita ao professor acessar grande número e variedades de demonstrações do Teorema de Pitágoras. É possível acessá-lo em PDF: (http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf).

envolvidos. É o caráter dinâmico (portanto, contrapondo-se ao *ergon* ou ao *opus*) que possibilita a constatação, a verificação visual, mas é a intervenção (no sentido de orientação sistematizada do processo) que levará à formalização e à conclusão a respeito do teorema de Pitágoras. Se conciliarmos então o recurso de uso de material manipulativo para provar as relações métricas como consequência das respectivas semelhanças dos triângulos advindos de um triângulo retângulo e os formados a partir da altura sobre a hipotenusa, acrescenta-se o tato e a manipulação permite que todas as relações sejam construídas a partir daí, como sugerida em Chaves (2001, p. 193-195).



Fonte: https://www.facebook.com/Fessora/media_set?set=vb.100000073940944&type=2 ou https://www.facebook.com/photo.php?v=807012685977855&set=vb.100000073940944&type=2&theater

Figura 8: Verificação do Teorema de Pitágoras por volumes de prismas associados aos catetos e à hipotenusa.

Propostas como a sugerida, em visita à História da Matemática, com o propósito de criar um cenário investigativo à aprendizagem, possibilitam, por exemplo, que retomemos o raciocínio dedutivo, usado pela primeira vez em Matemática por Tales[32] de Mileto e, em

[32] Tales (625 – 546 a.C.), nascido em Mileto, colônia grega da Ásia Menor, é o primeiro dos pensadores jônicos, fisiologista e filósofo. Para Platão Tales é o primeiro dos grandes filósofos. Aristóteles também tece grandes elogios a Tales. Seu conhecimento de Astronomia permitia-o prever para o ano seguinte se haveria ou não abundância na colheita de azeitonas. Heródoto refere-se a Tales como aquele que põe fim ao combate. "Tudo o que nos contam das especulações matemáticas de Tales não passa de uma aplicação espetacular de seu saber a alguma dificuldade real: prediz o eclipse que, aterrorizando dois exércitos em luta, põe fim ao combate (Heródoto, *Hist*., I, e 74); desvia o curso rio para evitar que o exército de Creso construa uma ponte (id., e 75, p. 78); mede o alto de uma torre, a distância que separa navios no alto-mar assim como,

seguida, por Pitágoras. Mais ainda, possibilita que passássemos do “como fazer” para o “por que” fazer? Isso porque os critérios de cientificidade também perpassavam, na época, do “como” para o “por que”. Talvez nos falte isso nas salas de aula. Urge transitarmos − no que tange tanto os conteúdos programáticos em questão bem como os recursos didáticos adotados – do “como” para o “por que”,

Por exemplo, para os pré-helênicos, afirmar que ângulos opostos pelo vértice são congruentes era uma verdade considerada tão óbvia que bastava sobrepor um ângulo ao outro. Qual professor ainda não adotou a técnica de dobradura em papel para sobrepor ou justapor ângulos, com o intuito de justificar por visualização a verdade posta? Só que tal recurso didático[33] – das dobraduras – já era adotado há muito tempo, em moldes de madeira com dobradiças em linhas que seriam eixos de simetria.

Há de lembrarmos que quaisquer tentativas de dedução por recursos algébricos não retomam a proposta de uma Geometria dedutiva de Tales ou Pitágoras. O processo dedutivo da época deveria ser apresentado por régua e compasso. Não nos esqueçamos de que falamos de uma época inclusive que antecede à Axiomática de Euclides, portanto, demonstrar por decomposição que a soma dos ângulos internos de um triângulo era dois ângulos retos (e não 180º como dizemos hoje) era (e continua sendo) um processo que, por não incluir artifícios algébricos não implica em possuir menos rigor. Mas matematizar implica necessariamente em manter rigor?

---

graças à sua sombra projetada compara àquela do corpo de um homem, mede a altura de uma pirâmide. É por isso que se dá em geometria o nome de Tales ao teorema das proporcionais, cuja posse é implicada por todos esses cálculos. Claro, também os egípcios, que Tales foi visitar, eram capazes de proezas desse gênero, mas fazendo intervir apenas técnicas empíricas, receitas de agrimensores, de ‘atadores de corda’ como diziam os gregos, sem se alçar ao plano propriamente teórico. Essa maneira de resolver problemas práticos mediante recurso prévio ao abstrato parece, ao contrário, própria de Tales, porque propriamente grega. [...] Tales não estudou no Egito apenas as matemáticas; o tratado pesudo-aristotélico *Sobre as Cheias do Nilo* atribuiu-lhe uma explicação do fenômeno [...]” (HUISMAN, 2001, p. 899-900).

[33] Adotado inclusive nos processos de formação de professores da Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES), programa do Ministério de Educação e Cultura, nos anos de 1960, por Júlio Cesar de Melo e Souza, no querido Malba Tahan, Jairo Bezerra, Júlio Bruno, dentre outros.

Se tomarmos as obras de Malba Tahan[34] veremos que são instrutivas, incentivadoras e informativas, mas não necessariamente rigorosas ou demonstrativas. Basta examinarmos que TAHAN (1973, p. 73-81) ao tomar os ternos pitagóricos com a proposta de abordar o tema “Os Ternos Pitagóricos e o Amor Sincero” o assunto é abordado de forma concisa, até poética, séria, mas sem o rigor matemático esperado, pelo menos nos moldes atuais, contudo, em momento algum a abordagem deixa de ser investigativa. Por exemplo, TAHAN (1973, p. 75-77) argumenta que qualquer terno pitagórico será uma solução inteira para a equação diofantina $x^2 = y^2 + z^2$ na qual x é a hipotenusa e y e z são os catetos de um triângulo retângulo. Sugere também que para obter os ternos pitagóricos basta tomar as expressões $(a^2 + b^2)$, $2ab$ e $(a^2 — b^2)$ e atribuir aos elementos a e b, que nelas figuram, valores inteiros, positivos e desiguais, sendo a maior do que b. “O primeiro elemento, feita a substituição, dará o valor numérico da hipotenusa; as outras duas expressões darão respectiva- mente os valores numéricos dos catetos.” (TAHAN, 1973, p. 76)

O problema dos ternos pitagóricos consiste então em encontrar números inteiros x, y e z que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Daí, o que está em voga e conhecer três números x, y e z que satisfaçam a relação $x^2 + y^2 = z^2$; isto é, os números x, y e z que atendam tal relação denominados números pitagóricos. Pitágoras e Platão, cada qual em seus respectivos tempos, trabalharam para desenvolver uma expressão que possibilitasse sintetizar a relação entre quaisquer três números pitagóricos. Pressupõe-se que a partir dos ternos apresentados nas tabelas 1 e 2, Pitágoras, tomando como premissa um número natural, m, necessariamente ímpar,

---

[34] Júlio César de Melo e Sousa (06/05/1895 — 18/06/1974), mais conhecido pelo heterônimo de Malba Tahan, foi um escritor e educador matemático brasileiro. Através de seus romances foi um dos maiores divulgadores da Matemática no Brasil. De reconhecimento internacional pelas suas obras, livros de recreação matemática e fábulas e lendas passadas no Oriente, muitas delas publicadas sob o heterônimo/pseudônimo de Malba Tahan. Seu livro mais conhecido, *O Homem que Calculava*, é uma coleção de problemas e curiosidades matemáticas apresentada sob a forma de narrativa das aventuras de um calculista persa à maneira dos contos de *Mil e Uma Noites*.

$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2 \tag{1}$$

Já Platão, por volta de 380 a.C. para determinação desses ternos desenvolveu a seguinte expressão:

$$(2m)^2 + \left(m^2 - 1\right)^2 = \left(m^2 + 1\right)^2 \tag{2}$$

A questão é, que nenhuma dessas expressões ((1) e (2)) fornece todos os ternos pitagóricos. A expressão desenvolvida por Platão ((2)) pode ser considerada mais geral, pois m pode ser par ou ímpar, contudo, na expressão desenvolvida por Pitágoras ((1)) m necessariamente deve ser ímpar.

Como já vimos anteriormente, para os pitagóricos "Tudo é número"; no entanto, os mesmos pitagóricos estabeleceram o que seria a gênese da relação entre a Aritmética e a Geometria, ao relacionarem números com formas. Mais ainda, exaltaram e estudaram propriedades dos números e da Aritmética juntamente com a Geometria, a Música e a Astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa educacional pitagórico, o *quadrivium*. Assim desenvolveram os *números figurados* originados entre os membros mais antigos da academia pitagórica, segundo Eves (2004, p. 100).

> Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam a nomenclatura *números triangulares*, *números quadrados*, *números pentagonais* e assim por diante. (EVES, 2004, p. 100).

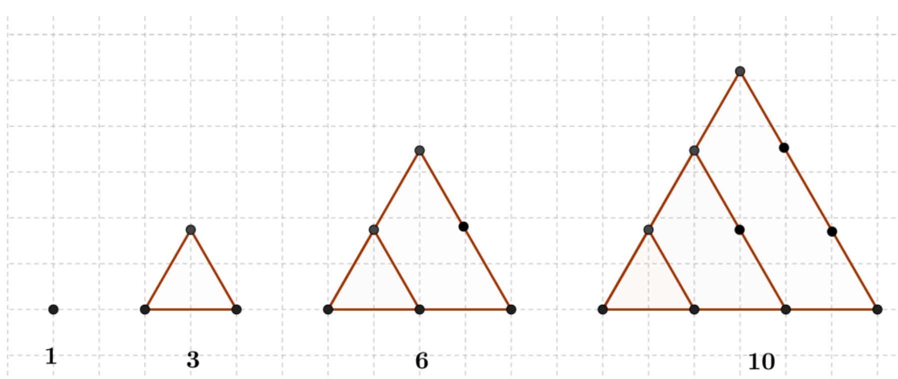


Figura 9: Números figurados triangulares

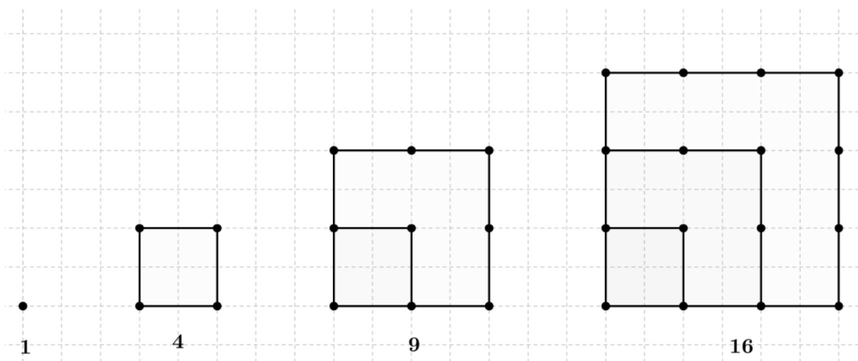


Figura 10: Números figurados quadrados

A mística pitagórica relaciona a arte prática de calcular números e o estudo de relações abstratas envolvendo os mesmos. Não nos esqueçamos de que a Escola Pitagórica além de centro de estudos de Filosofia, Matemática e Ciências Naturais, foi também um centro iniciático, onde uma irmandade pautava-se em ritos secretos e esta perdurou por pelo menos dois séculos após a morte de Pitágoras. No entanto, tais princípios cobriam-na de mistérios, mas não de incredibilidade.

Chamamos atenção para o fato de que, mesmo em se tratando de um assunto consolidado por processos históricos, não é salutar entendê-lo como algo pronto e acabado – como produto. É sempre possível que novas leituras (novos padrões) sejam efetuadas (identificados) (Cf. NRP 32). Essas novas leituras propiciam novos aprendizados, novos entendimentos e novas buscas, sobretudo, de padrões e, portanto, novas formas e maneiras de depositar um novo olhar sobre algo já visto. Visitar a História da Matemática bem como os problemas clássicos na qual nossos ancestrais se depararam bem mais do que mero diletantismo é um convite, um desafio a rompermos com o ETM e seus dispositivos; um convite a trabalharmos em ambientes que facultam ao aluno intuir, inferir, pesquisar, investigar e trabalhar de forma colaborativa, investigativa e integrada.

Por exemplo, Guerato (2014), ao tratar de números figurados, abre espaço para tecermos ao menos uma proposta: (a) de investigação histórica (ao discutir que estes se originaram com os membros mais antigos da escola pitagórica); (b) de abordagem conceitual, mas também histórica (pois expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, formando um elo entre a Geometria e a Aritmética); (c) de ambiente de aprendizagem investigativo, pois é possível estabelecer muitos teoremas interessantes relativos aos números figurados – veja o exemplo a seguir. "*Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos*.". O apelo geométrico, a partir das representações de um número quadrado e de um número triangular, trataremos em outro texto para não nos distanciarmos do nosso propósito.

3.1.2. Um embaraço pitagórico

O Livro V, de *Os Elementos*, é uma exposição da teoria de Eudoxo[35] e apresenta a *teoria das proporções* na sua forma puramente geométrica[36]. Foi por meio dessa teoria, aplicável tanto a grandezas *comensuráveis* como a grandezas *incomensuráveis*, que se resolveu o problema dos números irracionais, da qual os pitagóricos se depararam e foi

[35] Eudoxo de Cnido (408 - 355 a. C.) é considerado por alguns como o maior dos matemáticos gregos clássicos, em toda a antiguidade, perdendo apenas para Arquimedes. Ele rigorosamente desenvolveu o *método da exaustão* de Antífona, um precursor do Cálculo Integral. Tornou-se conhecido devido à sua *teoria das proporções* e ao *método da exaustão*, além de ter desenvolvido uma série de teoremas na Geometria, aplicou o método de análise para estudar a secção que acredita-se ser o que hoje se denomina seção áurea.

[36] Já o livro VI, de *Os Elementos*, aplica a teoria eudoxiana das proporções à Geometria Plana. Encontramos nele os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceira, quartas e médias proporcionais; a resolução geométrica de equações quadráticas; a demonstração que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados; uma generalização do teorema de Pitágoras na qual, em vez de quadrados, traçam-se sobre os lados de um triângulo retângulo três figuras semelhantes descritas de maneira análoga.

denominado de "a crise dos *incomensuráveis*", tendo Cílon como pivô, conforme tratamos no item 3.1. (*Uma arqueologia da Geometria grega*).

O que ficou conhecido na História da Matemática como "a crise dos *incomensuráveis*", para uns foi um retrocesso, mas para outros a grande oportunidade de romper com algumas verdades que levaram à transvalorização de concepções pitagóricas que eram mais místicas do que científicas: como, por exemplo, a tese de que no universo "tudo é número", ou seja:

> Tudo pode ser explicado através dos números (inteiros) e suas razões (números racionais). Acreditava-se também que dados dois segmentos quaisquer eles eram ***comensuráveis***, isto é, que existia entre eles um terceiro segmento, menor que os dois primeiros, tal que cada um deles era múltiplo inteiro do menor. (MOREIRA; CABRAL, 2011, p. 35).

Ávila (2011) afirma que: "foram os próprios pitagóricos que descobriram que o lado e a diagonal do quadrado são *incomensuráveis*." (ÁVILA, 2011, p. 48). No item 3.1.1. (ternos de números pitagóricos) desse texto apresentamos o que Eves (2004, p. 103) denomina de "demonstração por decomposição" ou "prova experimental" (Cf. figuras de 3 a 6). Vamos então tratar do argumento algébrico para dar conta de uma contraposição aritmética a respeito da questão da incomensurabilidade.

Na Grécia antiga os gregos tratavam a questão da proporcionalidade utilizando a sobreposição de segmentos de retas, fato que provavelmente levou-os à teoria de Eudoxo, utilizando assim a noção intuitiva de tamanho de um número inteiro positivo através dessa ideia. Ou seja, para tal comparação era tomado um segmento $\overline{AB}$ e um número natural m e denotava-se por $m \cdot \overline{AB}$ os segmentos obtidos pela justaposição de cópias do segmento $\overline{AB}$ sobre uma reta suporte; assim eram obtidas m cópias de um segmento de mesmo tamanho. Logo, afirmar que $\overline{AB} = \overline{CD}$ equivale dizer que os dois segmentos possuem o mesmo tamanho. Daí, é possível apresentar a seguinte definição: Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos para os quais existem números naturais p e q tais que $q \cdot \overline{AB} = p \cdot \overline{CD}$, dizemos que esses segmentos são proporcionais.

Nesse caso adotaremos a nomenclatura apresentada em Baroni; Nascimento (2005, p.11):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} : \frac{p}{q} \tag{3}$$

Consequentemente, dessa definição, uma vez que foi garantida a existência de p e q, temos:

i. $p > q$ se, e somente se, $\overline{AB}$ é maior que $\overline{CD}$;

ii. $p < q$ se, e somente se, $\overline{AB}$ é menor que $\overline{CD}$;

iii. $p = q$ se, e somente se, $\overline{AB}$ possui o mesmo tamanho (ou fica sobreposto) que $\overline{CD}$.

Observemos que se $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} : \frac{p}{q}$, então é válido afirmar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} : \frac{k \cdot p}{k \cdot q}$, para qualquer que seja o inteiro positivo k. Então, quais são todos os pares de inteiros positivos que possuem a mesma significação que o par formado por p e q?

Para dar conta a tal questão, Baroni; Nascimento (2005, p.11) apresenta a seguinte proposição:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} : \frac{p}{q} \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} : \frac{m}{n} \text{ se, e somente se, } \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} : \frac{p}{q} \text{ e } m \cdot q = n \cdot p \tag{4}$$

Com o propósito de demonstrar tal proposição, suponhamos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} : \frac{p}{q}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} : \frac{m}{n}$. Assim, de $q \cdot \overline{AB} = p \cdot \overline{CD}$ obtemos $n \cdot q \cdot \overline{AB} = m \cdot p \cdot \overline{CD}$ e também, $n \cdot \overline{AB} = m \cdot \overline{CD}$, donde tiramos $m \cdot q \cdot \overline{CD} = n \cdot p \cdot \overline{CD}$ e, portanto, $m \cdot q = n \cdot p$. Reciprocamente, se $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} : \frac{p}{q}$ e

$m \cdot q = n \cdot p$, então $q \cdot \overline{AB} = p \cdot \overline{CD}$ e $m \cdot q = n \cdot p$, em que $n \cdot q \cdot \overline{AB} = n \cdot p \cdot \overline{CD} = m \cdot q \cdot \overline{CD}$. O que implicava, para os gregos, que q cópias do segmento de reta $n \cdot \overline{AB}$ possuem o mesmo tamanho que q cópias do segmento de reta $m \cdot \overline{CD}$. Logo, os segmentos $n \cdot \overline{AB}$ e $m \cdot \overline{CD}$ têm o mesmo tamanho.

Tomemos ainda a seguinte definição apresentada em Baroni; Nascimento (2005, p.15): Dizemos que segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *comensuráveis* (ou seja, podem ser medidos com a mesma unidade de medida), se existe um segmento *U* e naturais p e q tais que:

$$\overline{AB} = p \cdot U \text{ e } \overline{CD} = q \cdot U \tag{5}$$

Ou seja, o que os gregos propunham, é que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são proporcionais se, e somente se, são *comensuráveis*, e que qualquer segmento podia ser escrito como a soma de cópias de quaisquer outros segmentos. Contudo, começou-se a perceber que havia pares de segmentos que não eram proporcionais, segmentos que não poderiam ser escritos como sobreposição de cópias de outro segmento qualquer, o que começou a gerar certo espanto entre os matemáticos gregos.

Para demonstrarmos aritmeticamente a questão de segmentos não-*comensuráveis*, consideremos a medição dos segmentos da figura a seguir:

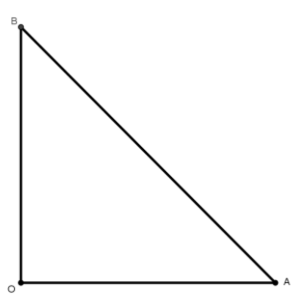


Figura 11: Triângulo ΔAOB, retângulo em Ô.

Seja ΔAOB um triângulo retângulo isósceles, ou seja, $\overline{AO} = \overline{BO}$, e tentemos resolver o seguinte problema: ***determinar a medida da hipotenusa*** $\overline{AB}$ ***tomando como***

medida de unidade o cateto $\overline{AO}$. Se, intuitivamente, essa medida existir, então por consequência do que afirmamos anteriormente, há um número racional $r = \frac{m}{n}$ em que *m* e *n* são primos entre si, de forma que:

$$\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{AO} \qquad (6)$$

Segundo Caraça (1989, p. 49) tal igualdade é incompatível com outra igualdade matemática. Dado o triângulo antecedente (Cf. figura 11), pelo teorema de Pitágoras podemos afirmar que:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 \qquad (7)$$

Como $\overline{AO} = \overline{BO}$, vem $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AO}^2$, ou seja:

$$\overline{AB}^2 = 2 \cdot \overline{AO}^2 \qquad (8)$$

Substituindo a expressão (6) em (7) teremos:

$$\overline{AB}^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \overline{AO}^2 \qquad (9)$$

Mas de (8) podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AO}^2} = 2 \qquad (10)$$

Assim como de (9) podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AO}^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \qquad (11)$$

Logo, de (10) e (11) chegamos à igualdade:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \qquad (12)$$

Consequentemente:

$$m^2 = 2 \cdot n^2 \qquad (13)$$

Portanto, de (13), podemos concluir que m^2 é um número par; contudo, se o quadrado de um número é par, então esse número também é par. Da mesma forma que o quadrado de todo número ímpar é ímpar. Teremos, portanto, m par. Consequentemente n será ímpar, pois, por hipótese, a fração $\frac{m}{n}$ é irredutível.

Consideremos, pois k a metade de m. Assim, podemos escrever que $m = 2 \cdot k$, onde k é um número inteiro. Substituindo este valor de m na igualdade (13) temos:

$$(2 \cdot k)^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow \quad 4 \cdot k^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow \quad n^2 = 2 \cdot k^2 \qquad (14)$$

Donde se conclui que n^2 é par e, portanto, pela mesma razão supracitada, que n também é par. Portanto, n deve ser simultaneamente par e ímpar, visto que a fração $\frac{m}{n}$ é irredutível e isto é um absurdo, pois um número não pode ser simultaneamente par e ímpar. Assim, por redução ao absurdo o lado e a diagonal do quadrado, ou a hipotenusa e o cateto de um triângulo retângulo isósceles, são grandezas *incomensuráveis*.

3.1.3. Números pitagóricos em distribuições *gnomônicas*

Segundo Silva; Nunes (2014, p. 12) os gregos da Antiguidade consideravam *gnomon* (etmologicamente, conhecedor) como uma peça que poderia juntar-se a uma figura da mesma forma, mas de tamanho maior. Se tomarmos a figura 12b a seguir verificaremos que cada *gnomon*, representado pelo corredor em forma de L (refletido) representa um número ímpar da sequência (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...). Observemos que cada novo quadrado formado apresenta como resultado a soma dos *gnomons* que os constituem. Comparemos então a figura 12b com a tabela 4 a seguir.

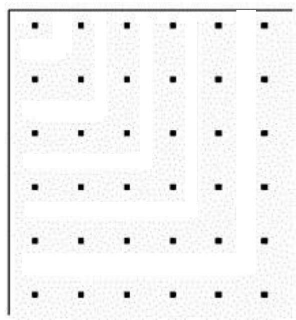


Figura 12a: Representação da distribuição de pontos em forma de quadrado

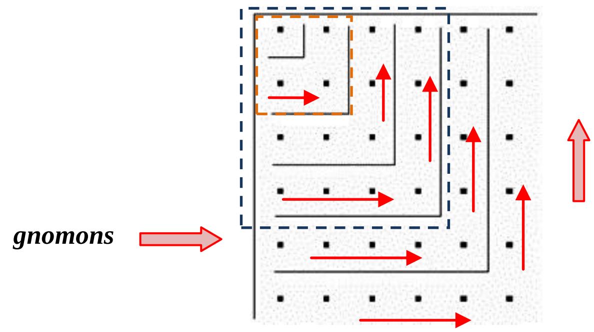


Figura 12b: *Gnomons* que representam a série 1 + 3 + 5 + 7 ...

Há pouco falamos dos ternos de números pitagóricos. O terno pitagórico primitivo (3, 4, 5) *gnomonicamente* pode ser representado conforme na figura 13 a seguir, visto que:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow 5^2 - 3^2 = 4^2 \qquad (15)$$

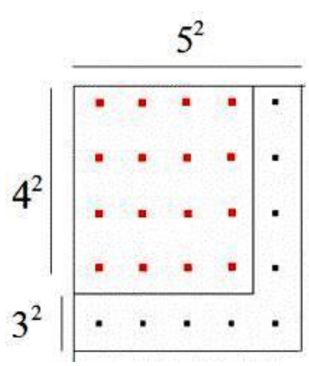


Figura 13: Representação de um terno pitagórico na forma de *gnomons*.

Isto é, se do quadrado de 5 por 5 pontos retirarmos o *gnomon* constituído de 9 pontos, portanto 3^2, ficaremos com um quadrado de 4 por 4 pontos.

Observando cada *gnomon* na figura 12b é possível construirmos a tabela 4 a seguir e veremos que o 1º *gnomon* possui 1 elemento. O 2º *gnomon* possui 3 elementos e se “juntarmos” com o primeiro formaremos um novo quadrado formado por 1 + 3 = 4 elementos. O 3º *gnomon* é formado por 5 elementos e se “juntarmos” com o primeiro e o segundo *gnomons* formaremos um novo quadrado com 1 + 3 + 5 = 9 elementos.

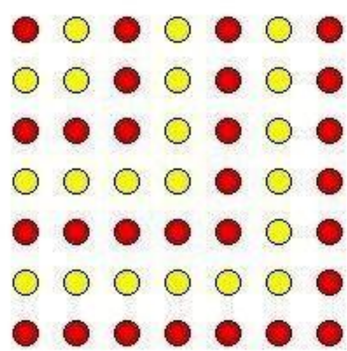
Tabela 4 – Resultado das somas parciais por novos quadrados formados

Ordem	**Adição dos elementos**	**Soma**
1	1	1
2	1 + 3	4
3	1 + 3 + 5	9
4	1 + 3 + 5 + 7	16
5	1 + 3 + 5 + 7 + 9	25
6	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11	36

Analisando algumas relações, entre linhas e colunas da tabela anterior, é possível, por exemplo, destacarmos algumas relações. Verificando linha por linha, por recorrência, na n-ésima linha teremos: (i) uma soma de n elementos, (ii) $2n - 1$ elementos no *gnomon*; (iii) a soma dos n primeiros números ímpares, começando por 1, comparando, linha por linha, a primeira e a terceira colunas podemos verificar que o resultado é o quadrado perfeito correspondente. Ou seja,

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 2n - 1 = n^2 \qquad (16)$$

Que também pode ser ilustrado conforme figura 14 a seguir:



$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Figura 14: representação *gnomônica* da soma de n primeiros números inteiros positivos ímpares.

Assim, podemos generalizar que: *a soma de um número qualquer de inteiros ímpares consecutivos, começando com o 1, é um quadrado perfeito*. Observemos que não apenas o apelo de utilização das técnicas de cor, mas também a disposição *gnomônica*, auxilia, senão na constatação, pelo menos na verificação, de que tal soma gera um quadrado perfeito.

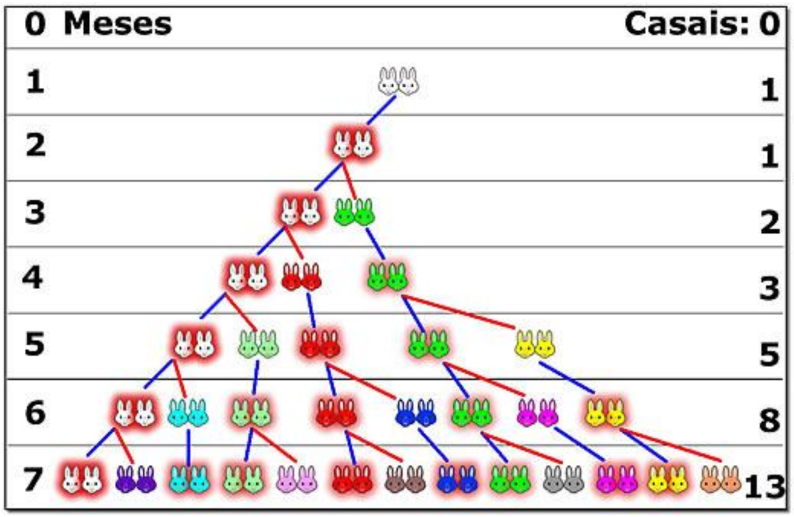
A distribuição *gnomônica*, bem como a organização de números segundo padrões (como os figurados, por exemplo) constituem-se em argumentos irrefutáveis de que a humanidade prima por tentar representar o universo, a vida, os objetos, a música, as expressões da sua cultura segundo uma organização ou decodificação matemática. Daí a concepção platônica de que "Deus é o grande geomêtra. Deus geometriza sem cessar.". Assim, efetuar leituras matemáticas do mundo não é artifício da modernidade, mas peculiar aos seres humanos.

3.1.4. A sequência de Fibonacci[37]:

Foi em *Liber Abacci* (1202), seu livro mais famoso, que *Fibonacci* apresentou a sequência que levou seu nome, embora tal sequência já tivesse sido descrita por matemáticos indianos. O problema de Fibonacci consta de uma única pergunta: *Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano?*

[37] Leonardo de Pisa nasceu em Pisa (Itália) por volta de 1175 e pensa-se que morreu em 1250, também em Pisa. Fibonacci: diminutivo de *fillius Bonacci*; ou seja, filho de *Bonacci*. Viajou várias vezes ao Oriente e ao Norte de África, onde o sistema de numeração hindu-arábico era já largamente usado. Teve acesso à obra de *al-Khwarismi* e assimilou numerosas informações aritméticas e algébricas compilando-as em seu livros que influenciaram a introdução do sistema de numeração hindu-arábico na Europa. Estudou as operações elementares, assim como os números naturais, a decomposição de números em fatores primos, as frações e as equações dentre outros.

Como hipóteses para solução ele considerou: (i) a cada mês ocorre o nascimento de um par (casal); (ii) um par começa a reproduzir quando completa dois meses de vida. Assim, observemos a figura (15) a seguir.



Fonte: (CHAVES, 2011 - 5º Seminário do Programa de Iniciação Científica do IFG)

Figura (15): Geração de pares de coelhos segundo as hipóteses do Problema de Fibonacci

Vejamos que, em colunas, temos:

1

1 = 1 + 0

2 = 1 + 1

3 = 1 + 2

5 = 2 + 3

8 = 3 + 5

13 = 5 + 8

21 = 8 + 13

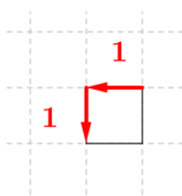
... ...

Por recorrência podemos verificar que cada termo desta sequência (a partir do 3º) é a soma de outros dois termos que o antecedem. Logo, em um ano a sequência gerada foi:

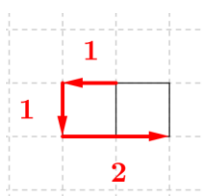
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 (17)

Uma possível configuração de *gnomons* a considerar, relaciona a sequência de Fibonacci com a sequência de retângulos áureos que formará uma espiral logarítmica (Cf. figuras 16 e 17). Para tal, na figura 16, basta seguir o esquema de setas apresentadas, onde o comprimento de cada segmento representa um termo da sequência e ao partir de um segmento para outro rotacionamos em 90º no sentido anti-horário.

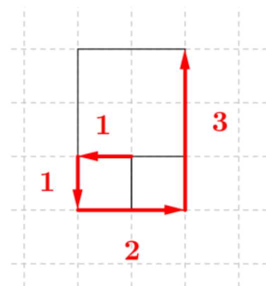
Dessa forma, na figura 16, temos: (a) um quadrado de lado 1; (b) um retângulo de dimensões 1 e 2; (c) um retângulo de dimensões 2 e 3; (d) um retângulo de dimensões 3 e 5; (e) um retângulo de dimensões 5 e 8; (f) um retângulo de dimensões 8 e 13.



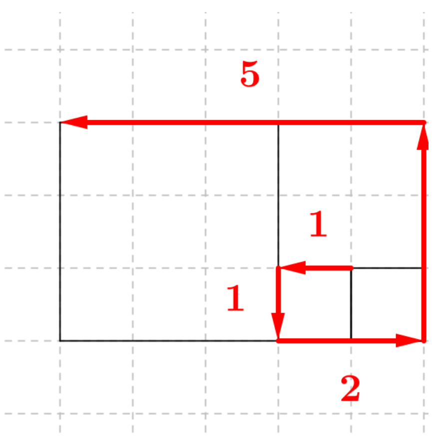
(a)



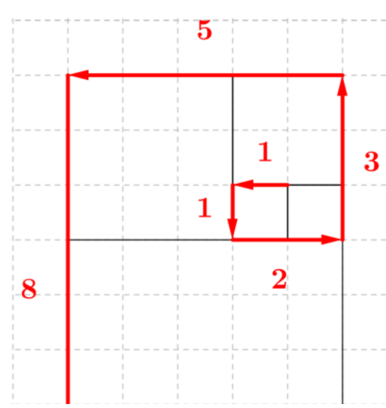
(b)



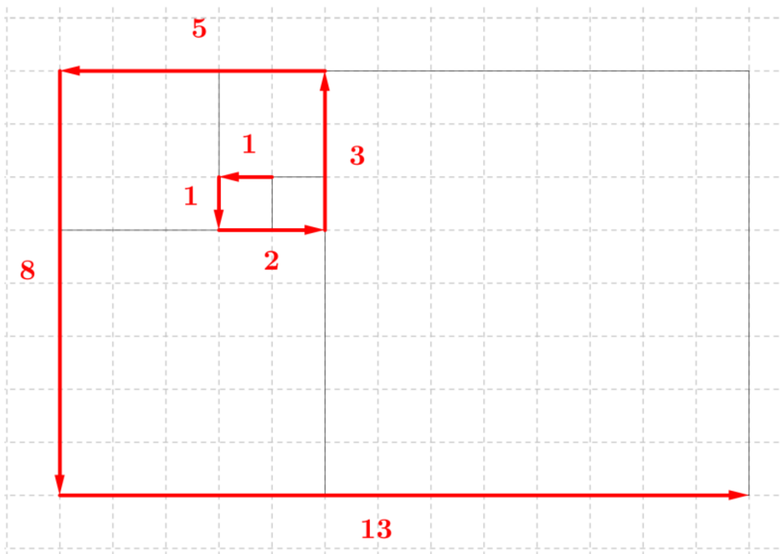
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 16: termos da sequência de Fibonacci a partir dos gnomons

Na figura 17, a seguir, temos: (i) dois quadrados de lado 1; (ii) um quadrado de lado 2; (iii) um retângulo de dimensões 2 de base e 3 de altura; (iv) um quadrado de lado 3; (v) um retângulo de dimensões 5 de base e 3 de altura; (vi) um quadrado de lado 5; (vii) um retângulo de dimensões 5 de base e 8 de altura; (viii) um quadrado de lado 8; (ix) um retângulo de dimensões 13 de base e 8 de altura.

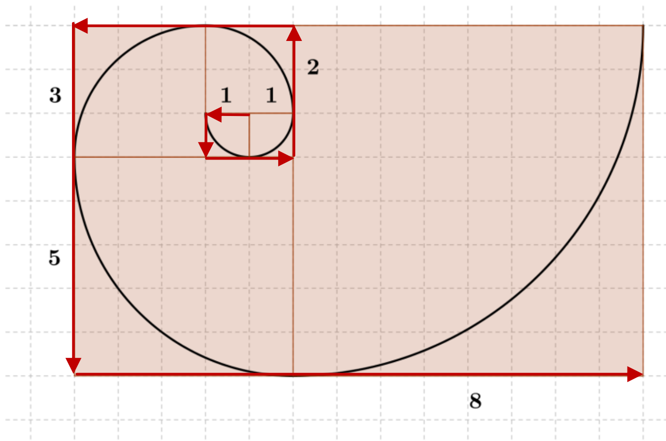


Figura 17: Espiral logarítmica

Como mencionamos no item 2.1. (*Um possível entendimento*) a busca de padrões é intrínseca no ser humano, bem como em alguns animais. É da natureza humana procurar identificar padrões para efetuar leituras do mundo e o trânsito entre a produção de significados a partir de padrões geométricos é mais peculiar do que se imagina; tanto que, ao modelarmos, buscamos sempre partir do modelo mais simples e, na busca de tal simplificação, é peculiar a tentativa de transformar um conjunto de dados numéricos em um gráfico ou padrão geométrico.

Ao tomarmos a sequência de Fibonacci, não relacionamos todos os possíveis significados a serem produzidos para esse objeto, mas sim, o que em um contexto preciso se diz efetivamente. Logo, parafraseando Cezar (2014, p. 34), as leituras que efetuamos nos permitem refletir a respeito do que possivelmente venha a ser uma sequência de Fibonacci, por meio de construções criadas por outras pessoas, que tomamos como verdade, porém não necessariamente únicas. As verdades que produzimos e enunciaremos a partir do que nos é enunciado estão relacionadas com o contexto que estas enunciações estão inseridas e com os significados que produzimos a elas.

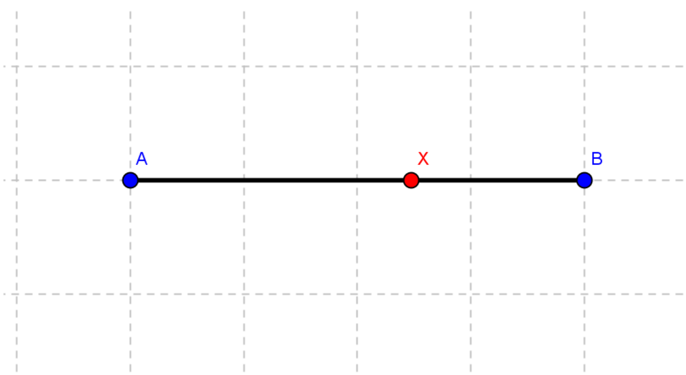
3.1.5. O número de Ouro

"A geometria possui dois grandes tesouros:
um é o teorema de Pitágoras;
o outro, a divisão de uma linha em extrema e média razão."
(KEPLER)

O Livro VI, de *Os Elementos* de Euclides, na definição 3, diz: *Uma reta é dita estar cortada em extrema e média razão, quando como a toda esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor*. (BICUDO, 2009, p. 231). Comumente os compêndios de Desenho Geométrico, por exemplo, definem média e extrema razão (segmento áureo) como:

> Dividir um segmento em média e extrema razão consiste em dividi-lo em dois outros segmentos tais que o maior seja a média proporcional entre o segmento dado e o menor. O segmento maior denomina-se **segmento áureo** (significa 'segmento de ouro', considerado pelos antigos gregos como segmento da medida perfeita). (PINTO, 1991, p. 93).

Isto é, dado o segmento $\overline{AB}$ de extremidades em *A* e *B*, o ponto *X*, denominado ponto de ouro, é tal que:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \Leftrightarrow \overline{AX} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{XB}},$$

onde $\overline{AX}$ é o segmento áureo.

Figura 18: Divisão de um segmento em média e extrema razão (segmento áureo)

Ainda, Pinto (1991, p. 94) destaca, na forma de receituário, o seguinte processo para determinar um ponto *X* que divide um segmento de extremidades $\overline{AB}$ em média e extrema razão: (i) traçamos uma semicircunferência (Cf. figura 19) de centro em *A* e extremidade em *B*; (ii) prolongamos o segmento $\overline{AB}$ e determinamos o diâmetro $\overline{CB}$; (iii) traçamos uma perpendicular a $\overline{CB}$ passando pelo ponto *A* e encontramos o raio $\overline{AD}$; (iv) determinamos *M*, ponto médio do segmento $\overline{CA}$; (v) traçamos um arco de circunferência com centro em *M* e extremidade em *D* até encontramos o segmento $\overline{AB}$ e determinamos o ponto *X* que divide o segmento $\overline{AB}$ em *média e extrema razão*; (vi) o segmento $\overline{AX}$ é o segmento áureo, visto que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$.

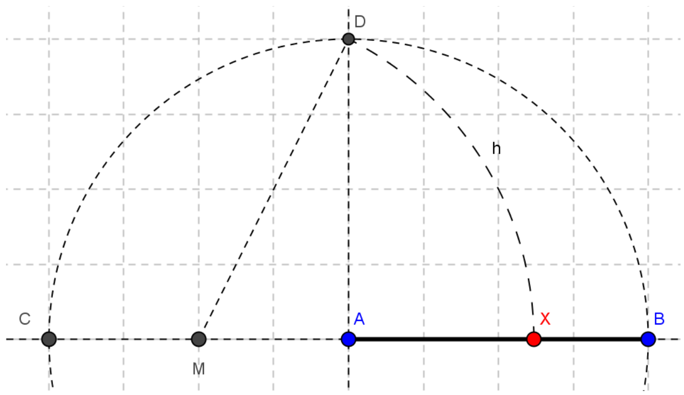


Figura 19: Técnica de determinação do ponto que divide um segmento em média e extrema razão.

Se bem observarmos $\overline{AB} = \overline{AD} = r$, raio do semicírculo e $\overline{MA} = \frac{r}{2}$. Vejamos que $\overline{MD} = R$ é o raio do arco *DMX* e, consequentemente $\overline{MX} = \overline{MA} + \overline{AX}$; isto é,

$$R = \frac{r}{2} + x \Rightarrow x = R - \frac{r}{2} \tag{18}$$

Se tomarmos o triângulo retângulo ΔMAD e aplicarmos o teorema de Pitágoras teremos que:

$$R = \frac{r\sqrt{5}}{2} \tag{19}$$

De (18) e (19) podemos concluir que:

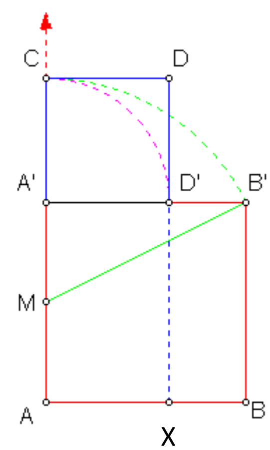
$$x = \frac{r \cdot (\sqrt{5} - 1)}{2} = r \cdot 0{,}6180339887... \tag{20}$$

Agora, como $\overline{MX} = \overline{MA} + \overline{AX}$ de (18) e (20), temos que

$$\overline{MX} = R = r \cdot 1{,}6180339887\ldots = r \cdot \phi \qquad (21)$$

Já Brandão (2014) conjectura que os pitagóricos utilizaram um processo geométrico para determinar a *média e extrema razão* de um segmento; isto é, para determinar o ponto áureo em um segmento dado.

> A forma tradicional, encontrada no livro *Os elementos* de Euclides, de resolução geométrica desta proporção é a seguinte: Dado o segmento AB, constroi-se o quadrado ABA'B'; constroi-se M como o ponto médio de AA'. Prolonga-se o segmento AA' e constroi-se a circunferência de centro M e raio MB', acha-se o ponto C de interseção da circunferência com a semi-reta AA'; constroi-se o quadrado de lado A'C. O prolongamento do lado DD' determina o ponto X em AB que seciona o segmento na razão desejada.



FONTE: http://www.matematica.br/historia/saurea.html

Figura 20: Demonstração segundo (BRANDÃO, 2014, ipsis verbis)

Para determinarmos a medida do segmento áureo $\overline{AX} = x$, consideremos o segmento $\overline{AB} = a$ e $\overline{MC} = y$. Observemos que $\overline{MC} = \overline{MB'} = y$, por ser raio do arco de circunferência MCB'. Como M é ponto médio do lado do quadrado, temos $\overline{A'M} = \frac{a}{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\Delta A'MB'$, temos:

$$y^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow y = \frac{a\sqrt{5}}{2} \qquad (22)$$

Mas, como $A'CDD'$ é um quadrado, temos que $\overline{AX} = x = y - \frac{a}{2}$. Daí, se considerarmos $a = 1$ e de (22):

$$\overline{AX} = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi} = 0{,}6180339887... \qquad (23)$$

Isso significa que o segmento áureo equivale a aproximadamente 61,8% do comprimento total do segmento, mas,

$$\frac{1}{\phi} = 0{,}6180339887... \Rightarrow \frac{1}{0{,}6180339887...} = \phi \Rightarrow \phi = 1{,}6180339887... \qquad (24)$$

denominado *número de ouro*.

Para construirmos um retângulo áureo, seguimos os seguintes passos: (i) construímos o quadrado *ABCD*; (ii) determinamos o ponto médio *M* do lado $\overline{AB}$; (iii) fixamos o compasso com centro em *M* e extremidade em *C* e traçamos até a reta suporte de $\overline{AB}$ o arco de circunferência *CMX*, onde *X* é a extremidade da base do retângulo áureo *AXID*.

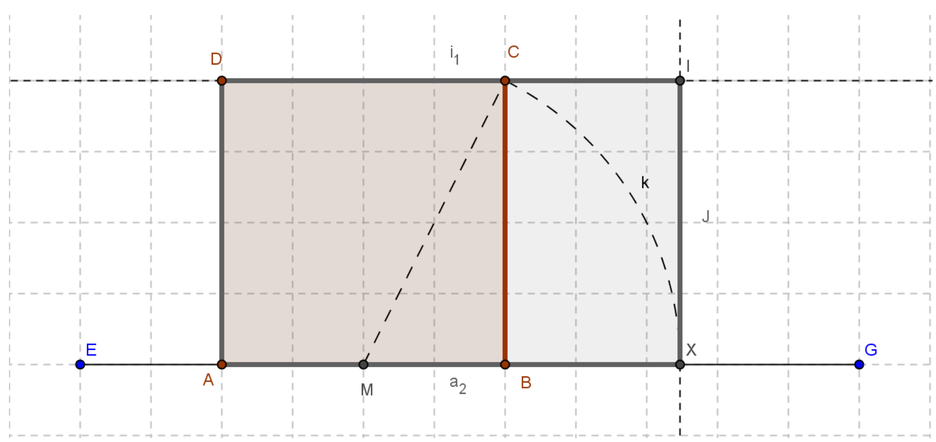
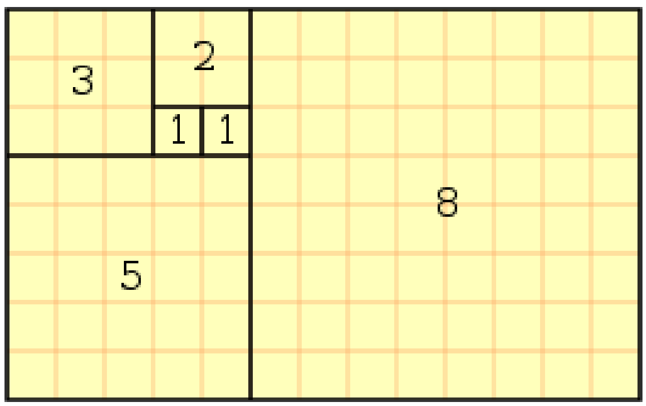


Figura 21: Construção do retângulo áureo a partir de um quadrado.

Assim, em cada retângulo formado a relação entre base e altura está diretamente associada à razão áurea, pois (no caso da figura 21) $\overline{AX}$, $\overline{AB}$ e $\overline{XB}$ estão em média e extrema razão. Vejamos que na figura a seguir (figura 22) temos sucessivos retângulos áureos gerando quadrados de lados 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... que são os termos da Sequência de Fibonacci. Eis então uma relação entre tal sequência e razão áurea.

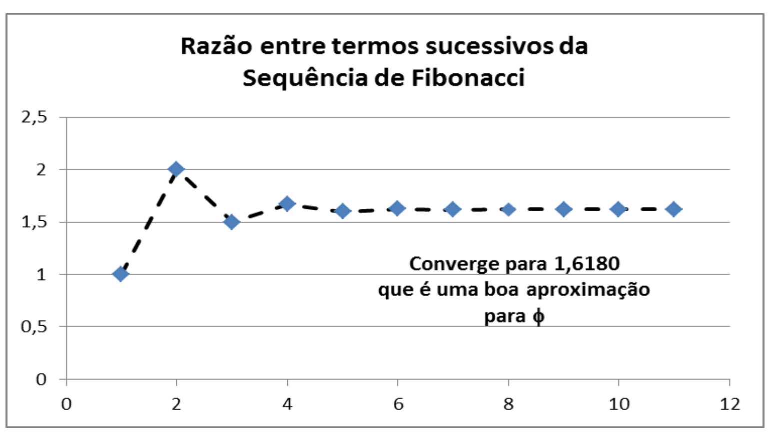


Fonte: (CHAVES, 2011 - 5º Seminário do Programa de Iniciação Científica do IFG

Figura 22: A Sequência de Fibonacci presente no retângulo áureo.

Ainda a respeito da Sequência de Fibonacci, observemos o que acontece quando tomamos dois termos consecutivos e dividimos cada termo pelo seu antecedente.

MÊS	PARES		
1	1		
2	1	1/1	1
3	2	2/1	2
4	3	3/2	1,5
5	5	5/3	1,666667
6	8	8/5	1,6
7	13	13/8	1,625
8	21	21/13	1,615385
9	34	34/21	1,619048
10	55	55/34	1,617647
11	89	89/55	1,618182



12	144	144/89	1,617978

Tabela 5: Razão dos termos da Sequência de Fibonacci

Figura 23: Convergência das sucessivas razões entre termos consecutivos da Sequência de Fibonacci

Vejamos que há convergência (gráfico da figura 23) com uma boa aproximação para o número *phi* ou número de ouro.

3.1.6. Matemática e natureza:

Sequência de Fibonacci, razão áurea, espiral logarítmica, π, a constante de Eüler etc. causam certo fascínio às pessoas, principalmente por suas respectivas relações com a natureza. A sequência de Fibonacci, por exemplo, se faz presente em configurações biológicas, como na disposição dos galhos das árvores ou das folhas em uma haste. Charles Bonnet[38], em 1754, associou a sequência de Fibonacci ao crescimento espiralado dos galhos e folhas nas plantas, em arranjos de folhas (Filotaxia)[39].

Observemos a figura ao lado. Consideremos que haja um padrão helicoidal para as folhas em torno do caule.

Cada conjunto de três folhas consecutivas (1, 2, 3) nascem formando um mesmo ângulo (entre 1 e 2 e entre 2 e 3), mantendo uma certa distância ao longo do caule.

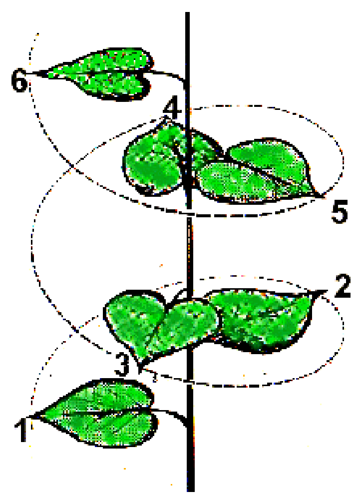


Figura 24: Distribuição helicoidal das folhas

[38] Charles Bonnet (Genebra, 13/03/1720 – 20/05/1793), biólogo e filósofo suíço, autor de importantes "descobertas" biológicas como a partenogénese.

[39] Filotaxia é o padrão de distribuição das folhas ao longo do caule das plantas.

Admitamos o mesmo padrão para todas as folhas. Na figura 24 temos, em 5 folhas, 2 voltas. Cada volta é entendida como uma rotação de 360º para que uma folha possa se sobrepor à outra. Para tal, cada ângulo deverá ser igual a $\frac{2 \cdot 360^{\circ}}{5} = 144^{\circ}$.

Pautado nos princípios da Filotaxia, segundo Teixeira (2011)[40], o adolescente Aidan Dwyer, na época com apenas 13 anos, desenvolveu um modelo metálico de coleta solar copiando a disposição das folhas em uma árvore. O padrão por ele utilizado foi a sequência de Fibonacci para posicionar painéis solares como as folhas de uma árvore.

> "Eu sabia que aqueles galhos e folhas coletavam a luz do sol para fotossíntese, então meu próximo experimento iria investigar se a sequência de Fibonacci ajudaria. Minha investigação começou quando eu tentei entender o padrão espiral." (DWYER, in TEIXEIRA, 2011, p. 37)

Mediu posições de galhos em várias árvores e teve a ideia de posicionar células solares em uma armação metálica imitando a configuração natural das folhas. Em paralelo, montou um número igual de sensores dispostos num painel, como nos coletores comerciais.

Com equipamentos simples traçou gráficos comparativos (figuras 26 e 27) da captação solar e observou que sua árvore maluca conseguia coletar 20% mais de energia do que o painel plano comum.

> "No inverno, quando o sol é mais fraco, captei mais de 50% a mais de luz do que no painel, ao longo do dia inteiro." (A.Dwyer)

[40] TEIXEIRA, Carlos Alberto. *Quando a solução é apenas copiar a natureza*. Sábado, 20 de agosto de 2011; Economia. In: O Globo, p. 37

Figura 25: Aidan Dwyer e seu modelo metálico de coleta solar copiando a disposição das folhas em uma árvore.

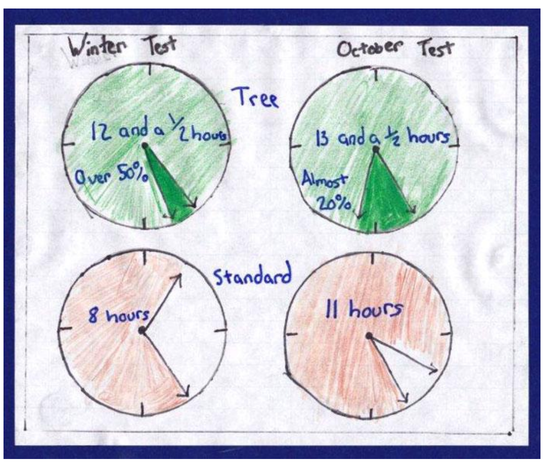


Figura 26: Gráfico de Setor utilizado por Aidan Dwyer em seu experimento

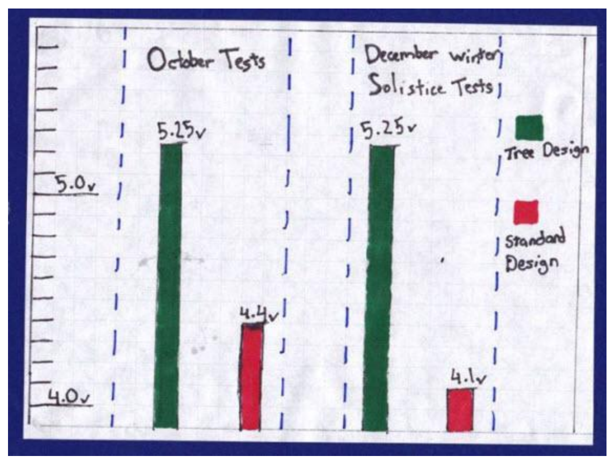


Figura 27: Gráfico de Barra utilizado por Aidan Dwyer em seu experimento

3.2. *Um pouco da vida de Leonardo Da Vinci:*

No final do século XV e início do século XVI, nos deparamos com uma figura interessante. Artista, filósofo, físico, engenheiro, inventor, arquiteto, escultor, cartógrafo, geólogo, astrônomo, anatomista, compositor, poeta, cozinheiro, e matemático. Seu nome? Leonardo Da Vinci, filho do notório advogado Piero de Antonio Da Vinci, e da camponesa Catarina. Viveu em uma época propícia para desenvolver seus talentos: a Renascença. Em poucas linhas o pensador Giorgio Vasari define Leonardo: "Cada uma de suas ações é tão divina que, deixando atrás de si todos os outros homens, expressamente se faz conhecer como uma coisa concedida por Deus" (BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 1). Para Freud Leonardo é "um homem que acordou muito cedo da escuridão enquanto outros homens dormiam." (BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 1).

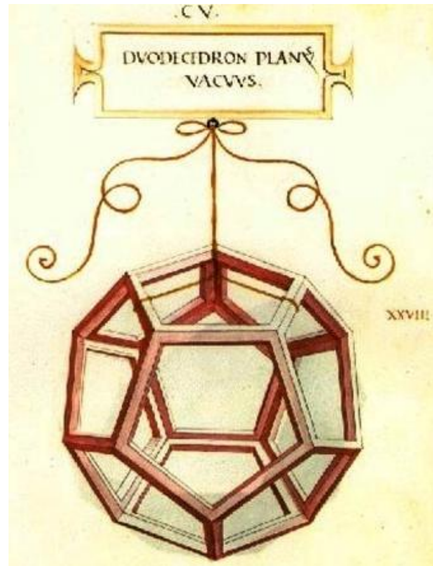
No que tange à Matemática, Leonardo, amante da Geometria[41] dedicou-se ao trabalho com figuras geométricas. Sua realização mais notável neste campo é o *poliédrico*, conjunto de ilustrações (Cf. figuras 28 a 30) nas obras "*Summa de Arithmetica, Geometrica, proportioni et proportionalita*" (1494)[42] e "*De divina proportione*" (1509)[43] de Luca Pacioli[44].

[41] Como podemos constatar em Atalay (2008, p. 144): "Espalhadas entre os manuscritos de Leonardo da Vinci, junto com desenhos, anotações, rabiscos e cálculos, há também diversas criações poliédricas, fruto do que **Leonardo denominava sua 'recreação geométrica'**. Com infinitas possibilidades de variação, esses poliedros regulares e semirregulares **parecem ter fascinado Leonardo**". (grifo nosso)

[42] Publicado em Veneza, constituía-se como uma coletânea de conhecimentos de Aritmética, Geometria, proporção e proporcionalidade.

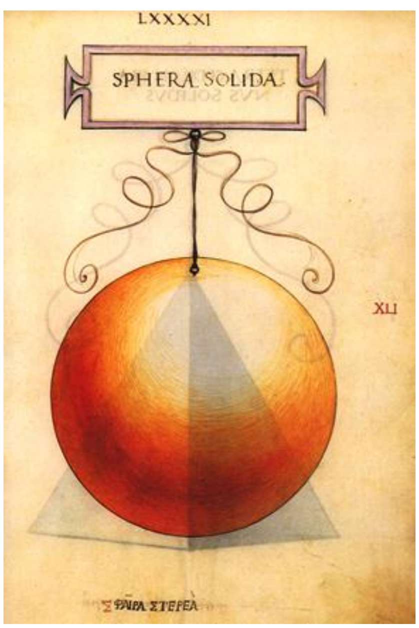
[43] Segunda obra mais importante de Pacioli, ilustrada por da Vinci, que tratava sobre proporções artísticas, além é claro de utilizar e discutir a razão áurea. Segundo narrativa de Bagni; D'Amore (2011, p. 72), nas primeiras páginas, Pacioli narra um debate, a qual denomina de "duelo científico" ocorrido na corte de Ludovico, o Moro, em 9 de fevereiro de 1498, na presença de eclesiásticos, teólogos, médicos, engenheiros e " inventores de coisa novas"(entre esses inclui Da Vinci).

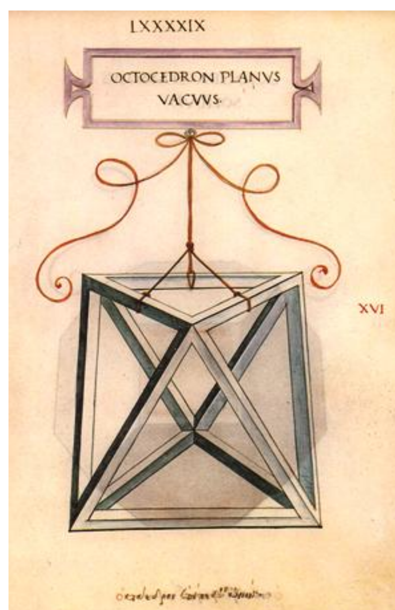
[44] Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 – 1517), monge franciscano e célebre matemático italiano. Em 1475, tornou-se o primeiro professor de matemática da Universidade de Perugia. Pacioli tornou-se famoso devido a um capítulo deste livro que tratava sobre contabilidade: *Particulario de computies et scripturis*. Nesta seção do livro, Pacioli foi o primeiro a descrever a contabilidade de dupla entrada, conhecido como método veneziano (*el modo de Vinegia*) ou ainda "método das partidas dobradas", por isso é considerado o pai da contabilidade moderna. Esse sistema foi introduzido em 1494, em um tratado matemático o qual o mérito fora atribuído a Leonardo de Pisa (Fibonacci), que por sua vez, introduzira tal metodologia 3 séculos antes, em sua obra *Summa*. Graças à sua obra (*Summa de Arithmetica, Geometrica, proportioni et proportionalita*), Pacioli foi convidado a lecionar Matemática na corte de Ludovico de Milão.



Fonte: http://jonasportal.blogspot.com.br/2010/03/os-poliedros-de-leonardo-da-vinci.html

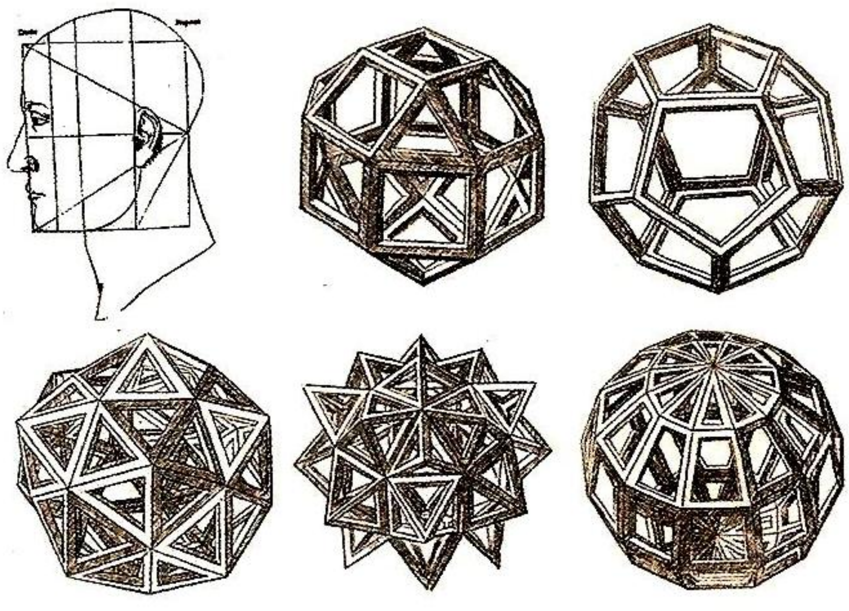
Figura 28: O termo *Ycocedron Planus Abscisus* na placa título significa *icosaedro truncado.*





Fonte: http://jonasportal.blogspot.com.br/2010/03/os-poliedros-de-leonardo-da-vinci.html

Figura 29: Os Poliedros de Leonardo da Vinci – desenhos feitos manualmente com admirável perfeição.



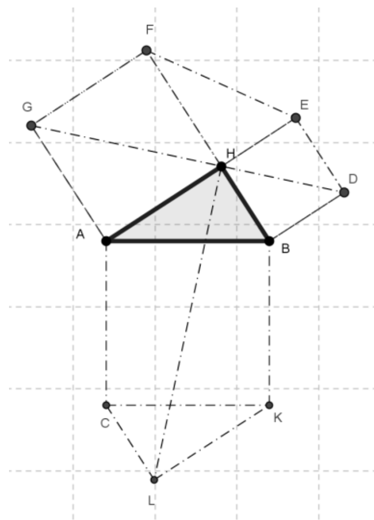
Fonte: (ATALAY, 2008, p. 115)

Figura 30: Ilustrações de Da Vinci em *De divina proportione*.

Em *De divina proportione* além de texto explicativo, há 60 ilustrações, das quais vários poliedros bem como o desenho de um novo tipo de letra impressa – caracteres vitruvianos. É possível também verificar a presença de uma figura onde faz-se análise das proporções de um rosto humano tomado de perfil; em tal gravura é traçado um triângulo equilátero com um dos vértices localizado na base do crânio e base oposta tangenciando o perfil (Cf. figura 30).

Da Vinci, que além de amigo também foi aluno de Pacioli, que nutria fascínio pela Geometria[45], desenvolveu uma "demonstração por experimentação" ou "demonstração por decomposição", apresentada em Loomis (1968, p.129), do teorema de Pitágoras.

[45] "O interesse pela geometria, já tão presente em Leonardo, cresce imensamente à medida que Luca (Pacioli) a revela para ele." (BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 62 ─ grifo nosso).



Fonte: Loomis (1968, p. 129)

Figura 31: Demonstração de Leonardo Da Vinci do teorema de Pitágoras

Santos; Silva; Lins (2012) a partir de leituras de Lima (1998, p. 55) destaca que os quadriláteros *LCAH*, *HBKL*, *DEFG* e *DBAG* são congruentes e, consequentemente os hexágonos *AGFEDBA* e *AHBKLC* têm a mesma área; donde resulta que a área do quadrado *ABKC* é a soma das áreas dos quadrados *AGFH* e *EDBH*.

> Da Vinci se baseou no princípio da comparação de áreas. Ele fez uso de uma forma mais complexa e de difícil visualização. Utilizou as áreas dos quadriláteros formados a partir de uma figura desenhada anteriormente para comprovar suas equivalências e assim comprovar a relação existente entre os lados dos triângulos retângulos. (LIMA, 2006, apud: SANTOS; SILVA; LINS, 2012).

Loomis (1968, p. 129), na demonstração 46, apresenta a mesma figura e alega não ser necessário explanar a respeito da construção e, das 23 linhas destinadas à demonstração de Da Vinci; apenas 8 destinam-se às comparações que levam à demonstração por decomposição.

No entanto, propomos que debulhemos a figura 31 para outra demonstração, por decomposição, a partir do que foi exposto.

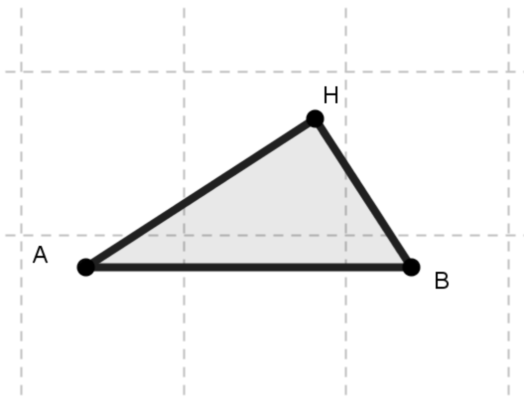


Figura 32: 1ª hipótese – ΔABH é retângulo em H.

{1} Tomemos como 1ª hipótese que o triângulo ΔABH é retângulo em H (Cf. figuras 32).

Como tese, ou seja, aquilo que queremos mostrar, é que a soma das áreas dos quadrados *BDEH* e *AGFH* é igual à área do quadrado *ABKC*.

{2} Agora tracemos a partir dos lados do ΔABH os quadrados *ABKC*, *AGFH* e *EDBH*. (Cf. figura 33).

{3} Ligando os vértices *F* e *E* formamos o ΔHFE, retângulo em H e, portanto, congruente ao ΔABH (Cf. figura 34).

{4} Logo a área dos triângulos ΔHFE e ΔABH são iguais (Cf. figura 34).

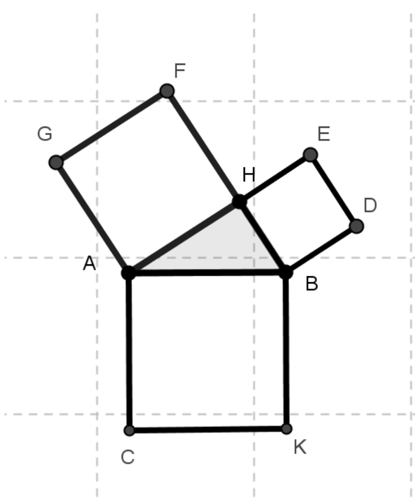


Figura 33

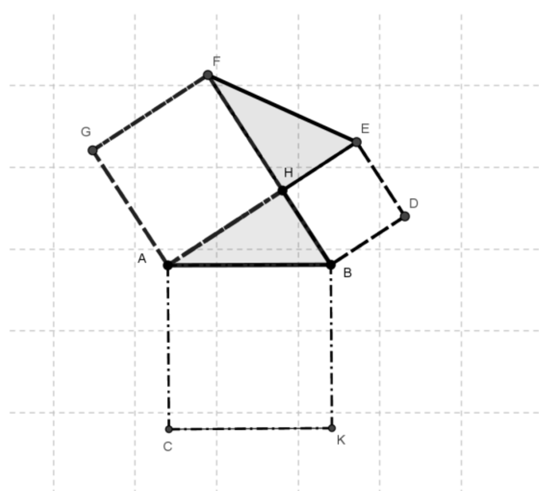


Figura 34

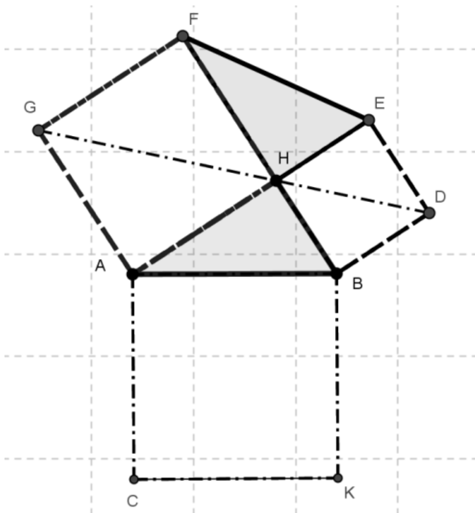


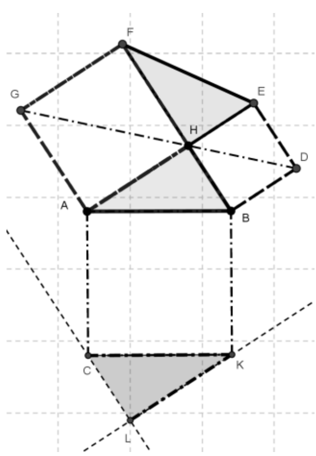
Figura 35

{5} $\overline{GH}$ e $\overline{HD}$ são diagonais dos quadrados *AGFH* e *EDBH*, respectivamente. Como *H* é um ângulo reto, $\overline{GD}$ é um segmento de reta que passa por *H* (Cf. figura35).

{6} Mas veja que os triângulos retângulos ΔGFH e ΔGAH são congruentes e, portanto têm áreas iguais, pois são formados a partir da diagonal $\overline{GH}$ do quadrado *AGFH* (Cf. figura 35).

{7} Analogamente os triângulos retângulos ΔHED e ΔDBH também são congruentes e, consequentemente, têm áreas iguais, pois são formados a partir da diagonal $\overline{HD}$ do quadrado *EDBH* (Cf. figura 35).

{8} Assim, de {5}, {6} e {7}, temos que os quadriláteros *GFED* e *GABD* são congruentes.



{9} Se traçarmos uma paralela à $\overline{HB}$ pasando por *C* e uma paralela à $\overline{AH}$ pasando por *K*, formaremos o ΔCLK, retângulo em *L* e congruente[46] ao ΔEHF e ao ΔBHA (Cf. figura 36).

{10} Observemos que no hexágono *AHBKLC* temos $\overline{AH} // \overline{LK}$ e $\overline{HB} // \overline{LC}$ (Cf. figura 36).

[46] Pelo teorema de Tales, do feixe de paralelas cortadas por uma transversal.

Figura 36

{11} Ao traçarmos o segmento $\overline{HL}$ formamos o ΔHAM congruente ao ΔNLK, portanto com áreas iguais. Analogamente formamos o ΔHMB congruente ao ΔNLC, portanto com áreas iguais (Cf. figura 37).

{12} De {11}, devido às respectivas relações de congruências temos que $\overline{AM}$ é congruente a $\overline{NK}$, assim como $\overline{MB}$ é congruente a $\overline{NC}$, do que resulta que os trapézios retângulos *AMNC* e *MBKN* são congruentes, portanto com a mesma área.

{13} De {9}, {10}, {11} e {12} temos que os quadriláteros *AHLC* e *LKBH* são congruentes, portanto de áreas iguais (Cf. figura 37).

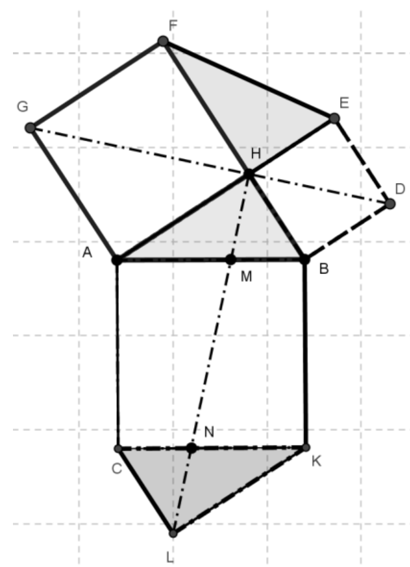


Figura 37

{14} Observemos os quadriláteros *HACL* e *GFED* (Cf. figura 36). $\overline{GF}$ é congruente a $\overline{AH}$, $\overline{FE}$ é congruente a $\overline{AC}$ e $\overline{ED}$ é congruente a $\overline{CL}$, pois, como vimos em {9}, ΔCLK é congruente ao ΔBHA. Consequentemente o ângulo *GFE* é congruente ao *HAC*, da mesma forma que o ângulo *DEF* é congruente ao ângulo *LCA*. Então, $\overline{GD}$ é congruente a $\overline{HL}$ o que resulta na congruência dos quadriláteros *HACL* e *GFED.*

{15} Mas, de {8} vimos que os quadriláteros *GFED* e *GABD* são congruentes e de {13} vimos que os quadriláteros *AHLC* e *LKBH* são congruentes. Logo, daqui e de {14} os hexágonos *AGFEDB* e *AHBKLC* são congruentes e, portanto têm a mesma área.

{16} Vejamos que o hexágono *AGFEDB* é formado pelos triângulos ΔEHF e ΔBHA (de mesma área) e pelos quadrados *AGFH* e *EDBH*. Da mesma forma, o hexágono

AHBKLC é formado pelos triângulos ΔCLK e ΔBHA (de mesma área) e pelo quadrado *ABKC*. Como estes dois hexágonos, *AGFEDB* e *AHBKLC* têm a mesma área (Cf. {15}), por decomposição, podemos extrair os quatro triângulos congruentes – eliminando-os dois a dois − de cada um desses hexágonos, restando assim o que queríamos demonstrar. Que "a soma das áreas dos quadrados *BDEH* e *AGFH* é igual à área do quadrado *ABKC*.".

Mas apesar de sua genialidade e desenvoltura com a Geometria, afirma Bagni; D'Amore (2011, p. 64) que "Leonardo não parecia sentir-se à vontade com as frações." O que pode ser comprovado no verso da folha 191, do *Código Atlântico*[47].

3.3. Padrões matemáticos nas obras de Da Vinci:

Os escritos mais importantes de Leonardo apontam sua relação com a Matemática. Suas coleções mais importantes são 10 *códigos*[48], dos quais envolvendo Matemática são: *Código Atlântico*; *Código Arundel*; *Códigos de Madri*; *Códigos do Instituto de França*; *Códigos Foster*.

> As considerações geométricas e as construções geométricas exatas que foram encontradas até agora no famoso *Código Atlântico* e nos outros manuscritos impressos não são suficientes, embora tudo que neles se leia seja original, para considerar Leonardo entre aqueles que souberam acrescentar alguma página à geometria herdada dos gregos (a única conhecida em seu tempo). Além disso, a ideia, manifestada por ele, de obter a retificação da circunferência fazendo escorregar uma roda sobre uma haste reta, confirma a opinião de que ele se interessava por geometria apenas na medida em que essa ciência resultava ser útil aos pintores e aos arquitetos. É uma conclusão que se confirma nas aplicações por ele realizadas de algumas lúnudas de Hipócrates (...) à quadratura de figuras complicadas, esteticamente admiráveis, mas carentes de valor científico. (LORIA, 1929-1933, p. 263 apud. BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 62).

[47] Ao tratar da obra de Leonardo Da Vinci adota-se o nome de *Código* para cada uma de suas coleções. Trata-se de cerca de 5.000 páginas de apontamentos que possuem a peculiar característica de terem sido grafados da direita para esquerda, elemento característico desse notório canhoto.

[48] *Código Atlântico* (1478-1518), *Código Arundel* (1478-1518), *Código Windsor* (1478-1518), *Código Trivulziano* (1487-1490), *Código Ashburnam*. *Códigos de Madri* (1490-1505), *Códigos do Instituto de França*, *Códigos Foster* (1493-1505), *Código Leicester* (1504-1506) e *Código sobre o voo dos pássaros* (1505).

Pelo que expusemos até então é possível ver que, mais do que verificar a existência de padrões nas obras de Da Vinci, é incontestável o quanto Leonardo produz Matemática e mesmo que os sépticos aleguem ser aquém da Matemática que hoje se conhece, lembramos ser muito além da Matemática produzida na sua época.

Sua admiração pela razão áurea é apresentada por Bagni; D'Amore (2011):

> A geometria do nosso protagonista torna-se mais culta, os problemas propostos são quase sempre extraídos da obra de Pacioli, com frequência, por sua vez, extraídos de Euclides. Leonardo apaixona-se pela razão áurea que lhe é apresentada por Pacioli, à qual dá o nome de 'divina proporção'. (BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 72).

Mas o próprio Leonardo declara essa admiração pela teoria das proporções (incluindo a divina proporção) ao discorrer sobre a anatomia humana com o propósito de tratar suas obras. Mesmo que não tenha sido o primeiro a descrever as proporções ideais do rosto com obsessiva exatidão, escreveu mais de 800 páginas a respeito da proporcionalidade do rosto e depois passado ao resto do corpo, como pode ser observado no *Código Atlântico* e no *Código Windsor*.

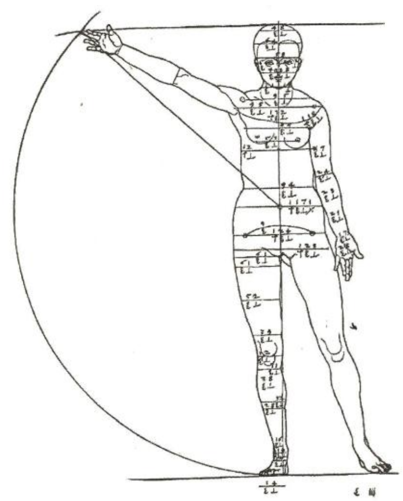
> A DIVINA PROPORÇÃO E A ANATOMIA HUMANA − A distância entre a fenda da boca e base do nariz é um sétimo do rosto [...]. A distância entre a boca e abaixo do queixo será um quarto do rosto, assemelhando-se à largura da boca [...]. A distância entre o queixo e a base do nariz será metade do rosto. Se dividirmos em quatro partes iguais o comprimento total do nariz (ou seja, desde a ponta até a junção com as sobrancelhas), veremos que a parte inferior corresponde à distância entre acima das narinas e abaixo da ponta do nariz; a parte superior, à distância entre o duto lacrimal e o início das sobrancelhas; e as duas partes intermediárias, à distância entre os dois cantos de cada olho. Leonardo da Vinci (ATALAY, 2008, p. 131)

Veremos em figuras adiante que Da Vinci lançou mão de recursos que envolvem a retângulos áureos. Já vimos anteriormente a relação entre retângulos áureos e a sequência de Fibonacci, mas é Atalay (2008) que relaciona Fibonacci a Da Vinci:

> [...] há entre a matemática, a estética e a ciência uma ligação mais ampla que nos leva a pôr os dois Leonardos (o Da Vinci e o Fibonacci) sob a mesma égide intelectual. Mas, no fim das contas, temos também a poderosa imagem de afluentes intelectuais cujas nascentes eram muito anteriores (no antigo Egito, na Índia, na Babilônia e na Grécia clássica), mas cuja confluência só se daria muito depois. (p. 116).

Vitrúvio[49] formulou uma teoria arquitetônica inspirada nas proporções do corpo humano.

> Lembremos que Leonardo da Vinci estuda as proporções da figura humana segundo os ditames de *De architectura*, de Vitrúvio, que se baseia justamente nas relações do número áureo. **Segundo Leonardo, as proporções humanas são perfeitas quando o umbigo divide o homem de maneira áurea**. (BUSSAGLI, 1999). É necessário lembrar que Dürer realizou estudos análogos como prova a imagem ... e que é espontâneo compará-la com a do *homem Vitruviano* de Leonardo. (BAGNI; D'AMORE, 2011, p.80)

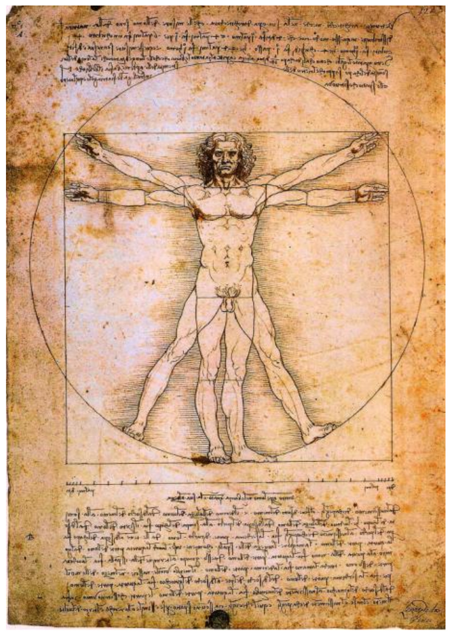


Fonte: (BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 80)

Figura 38: As proporções do corpo humano, segundo Albrecht Dürer.

Da Vinci, não apenas sorvera tal teoria, mas reverenciou o criador desta nos brindando com o *Homem Vitruviano* (Cf. figura. 39).

[49] Marcos Vitrúvio Polião, arquiteto e engenheiro romano que viveu no século I a.C. deixou como legado a sua obra em 10 volumes, aos quais deu o nome de *De Architectura* (± 40 a.C.) que constitui o único tratado europeu do período greco-romano que chegou aos nossos dias e serviu de fonte de inspiração a diversos textos sobre construções, hidráulicas, hidrológicas e arquitetônicas desde a época do Renascimento. Os seus padrões de proporções e os seus princípios arquiteturais: *utilitas*, *venustas* e *firmitas* (utilidade, beleza e solidez), inauguraram a base da Arquitetura clássica.
(http://www.unifra.br/professores/13970/aula/Aula%201%20RESUMO.pdf)



Fonte: (ANTOCCIA et al, 2004, p. 81)

Figura 39: O *Homem Vitruviano* de Leonardo Da Vinci.

No *Homem Vitruviano* a distância entre as extremidades das mãos (com os braços na perpendicular) é igual à altura do indivíduo. Quando este eleva os braços e abre as pernas, inscreve-se num círculo, cujo centro se localiza no umbigo. Aqui, mais uma vez, a razão entre a altura do indivíduo e a do umbigo é a áurea: $\phi = 1{,}618...$

Tomando figuras sentadas ou eretas, com o propósito de estudar as funções assimétricas dos hemisférios cerebrais se manifestassem diferentemente em obras de artistas renomados Christopher Tyler, neurocientista em San Francisco, propôs uma análise estatística levando em conta 4 hipóteses: (i) a do eixo principal; (ii) a da razão áurea; (iii) a do centro na cabeça; (iv) a do centro em um dos olhos. Atalay (2008, p. 189) destaca que à primeira vista, “a maioria dos observadores concordaria que, nos retratos, os olhos em geral se localizam perto do centro da tela.”. Contudo, as análises de Tyler revelaram algo mais preciso: “um dos olhos, quer o composicionalmente denominante quer o outro, alinhava-se numa distribuição gaussiana (curva normal) com a reta central ou nas proximidades dela, havendo um estreito desvio-padrão de ± 5% da largura do quadro." (ATALAY, 2008, p. 190).

Tomando os quadros verticalmente, Tyler constatou que a altura dos olhos se achava no maior número de vezes não nas proximidades da reta horizontal central, mas nas proximidades do número de ouro depositado sobre a reta central vertical; isto é, a ± 61,8% da altura do quadro, como podemos constatar nas figuras 40 e 41 a seguir.

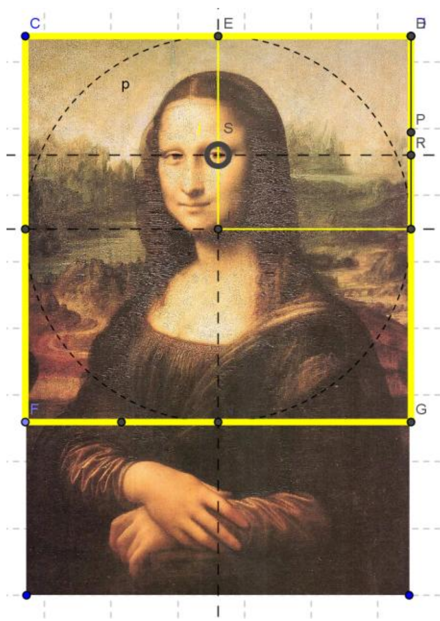


Figura 40: *Mona Lisa*

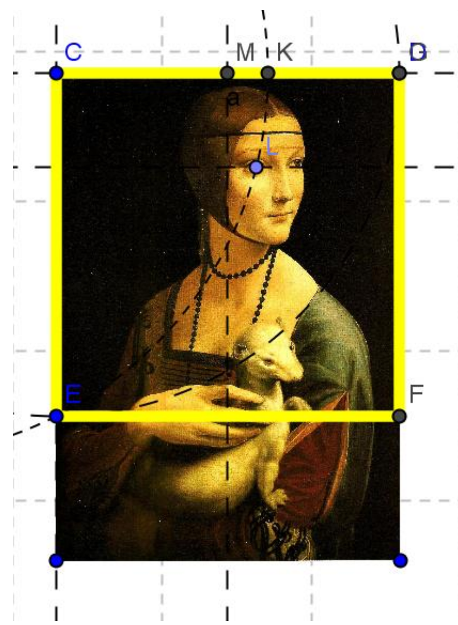


Figura 41: *Dama de arminho – Cecilia Gallerani*

4. Conclusões:

O músico e arranjador *Ian Guest*, em sua obra *Arranjo: método prático*[50], diz que "A deficiência em música, felizmente, não faz vítimas como na medicina ou no volante. Deitar a mão no instrumento impunemente é o começo de tudo [...] e a linha de chegada.". Parafraseando *Guest* pensamos que uma deficiência em relação ao ensino de Matemática (que pode levar ou não a um aprendizado), felizmente, não faz vítimas como na medicina

[50] GUEST, I. *Arranjo: método prático.* V. 1. 4. Ed. Rio de Janeiro: Lumiar, 1996, 150 p.

ou no volante, porém, quando tomamos o ETM como modelo, quando nos limitamos a trabalhar no ambiente vigente que o caracteriza, quando passamos a defender a Matemática (com seu formalismo exacerbado), bem como certa maneira de ensinar, como algo imutável, o número de vítimas passa a ser maior do que as vítimas de trânsito ou da falta de assistência médica adequada. Por isso defendemos usar a Matemática impunimente, tal como o instrumento musical de *Guest*, ou como os códigos de Da Vinci, como uma ferramenta a serviço de ações educativas que sejam transformadoras e comprometidas com projetos que primam por adotar ambientes investigativos de aprendizagem. Observemos que tal rigidez, bem como a linearidade apresentada no quadro 1, contrapõem-se a um dos princípios norteadores para área de Matemática no Ensino Básico, apresentado nos PCN:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas, entre ela e os Temas Transversais, entre ela e o cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 1998c, p. 56-57)

Guest nos lembra de que aprender a falar – o maior desafio da infância – é combinar brincadeiras e desejo de se comunicar, assim como aprender a desenhar, pintar, esculpir em massinhas, quando na infância. A música, bem como as demais formas de Arte, também nasce pela mesma motivação. Não se prenda nos limites da leitura. Ela é o produto final e ameaça aposentar o ouvido, bem como a criatividade. Da mesma forma lembramos que é difícil usar a Matemática como linguagem, por isso brincar com suas ideias e princípios, sobretudo tomando referenciais da História (da humanidade, da Arte, da Matemática, das civilizações etc.) deva ser um grande desafio levado ao aluno. Ir aos procedimentos adotados pelos antigos, tentar identificar significados produzidos por civilizações que tomaram a Matemática como ferramenta, assim como Tales e Leonardo, para resolver suas práticas cotidianas, de ordem social, artística, cultural, religiosa, econômica etc., possibilita que se estabeleçam relações e se produzam − além da capacidade de argumentação, comparação e validação de processo − o desenvolvimento da Matemática como linguagem, tal como é enunciado nos princípios a seguir dos PCN:

> ▪ No ensino de Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras, escritas numéricas); outro consiste em relacionar estas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a 'falar' e a 'escrever' sobre a Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.
>
> ▪ O ensino da Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa. (BRASIL, 1998c, p. 56-57)

A motivação para aprender Matemática deve estar presente na sua utilização, na resolução de problemas locais, pontuais, úteis à vida e que permitam o exercício da experimentação, intuição, da investigação. Não nos prendamos aos limites do formalismo, pois o formalismo matemático é produto (*ergon* ou *opus*), não processo, e ameaça a todos aqueles que pensam em usar a Matemática como uma ferramenta de leitura do mundo e de criatividade às suas vidas. Lembremo-nos que as obras de Da Vinci (produto) são frutos de observações, estudos, testagens, esboços, ensaios (processo).

Com essa proposta a construção do conhecimento matemático se dá pelo desejo de usar a Matemática impunimente, como um instrumento, uma obra de arte e de forma prática. A comunicação (aprendizado) se estabelece quando o aluno experimenta a Matemática (brincando com erros e acertos) na intervenção de um problema local, na investigação de algo que lhe é proposto quando envolve um número maior de sentidos, como o tato, associado à visão, à audição e até ao olfato, pois as obras de arte têm cheiro, sobretudo telas e livros. Isso faz sentido e gera aprendizado. Lembremo-nos que ensinar é algo distinto de aprender. O professor pode ensinar bem e isso não implica que o aluno compartilhará do mesmo espaço comunicativo que o professor. É possível que esteja aí um dos grandes problemas do ETM: acreditar que basta ensinar para aprender.

Usar a Matemática, seus princípios e procedimentos como ferramentas a serviço de temas geradores, processos investigativos, retomada à História (da humanidade, da Arte, da Matemática, das civilizações etc.), processo de leitura e interpretação de obras de arte etc., é um convite a desapegarmo-nos do ETM – sobretudo um convite à liberdade. Trabalhar a Matemática em sala de aula dessa forma é cultivar a liberdade de se expressar e não deixa-la morrer. Para tal, precisamos estimular a criatividade e diante disso, o professor de Matemática assume o compromisso de, além de tratar das estruturas matemáticas, passa a trabalhar com seus princípios para permitir que seja construído o acesso à liberdade de criar, intuir, experimentar, investigar. Os papéis das fórmulas, regras, definições, corolários, teoremas etc. deixam de serem os principais entes do processo de ensinar e são reduzidos quando comparados a propostas que possibilitem a construção do conhecimento, da criatividade.

Tal como a música e a pintura, entendemos a Matemática como uma linguagem desenvolvida e lapidada, sendo de fundamental importância que alunos e professores brinquem com ela, antes de se preocuparem com sua densa teoria e notação. Brincar para compreender seus princípios básicos. Primeiramente é preciso construir o conhecimento a respeito do que significa em termos de ideia, *adicionar*, *subtrair*, *grandezas direta* ou *inversamente proporcionais*, ou *grandezas* (*in*)*comensuráveis*, para depois aprender a expressar algebricamente a leitura de um problema ou trabalhar com dado algoritmo. Dar nome a *potência*, *raiz de equação*, *parábola* etc. é consequência de se produzir significados pertinentes aos princípios fundamentais dessas coisas e onde elas podem ser usadas.

> A atividade matemática escolar não é ‘olhar para coisas prontas e definitivas’, mas a construção e a participação de conhecimentos pelo aluno, que se servirá dela para compreender e transformar sua realidade. (BRASIL, 1998c, p. 56-57)

Uma conclusão que chegamos foi: é preciso desestabilizar o ETM, como também, qualquer estrutura rígida de controle que tenta tomar o professor como agente multiplicador de ideias, valores e costumes, para que possamos transvalorizarmo-nos e com isso minimizarmos os impactos socioambientais e culturais produzidos pelo regime de verdade que privilegia o consumo, as injustiças e a destruição dos recursos naturais em prol do lucro e da imposição incisiva de suas verdades.

Defendemos como verdade que promover ambientes investigativos de aprendizagem − pautado em princípios de liberdade − valorizando os potenciais artísticos e culturais dos alunos, constituem-se como instrumentos de desestabilização da atual ordem social vigente, mas que também é necessário desenvolver tais ambientes livremente para que não sejam capturados pelas instituições de sequestro passando a sofrer restrições que inviabilizem seu caráter despojado, comprometido, sobretudo com a experimentação e com o livre pensar, com o respeito ao indivíduo e à natureza.

Optamos por desestabilizar o ETM a partir de questões artísticas e históricas para que possamos subverter a concepção positivista e homilética de propagação de discursos segundo o foco da necessidade de utilizar a Matemática como base às relações de comércio, em prol de utilizá-la para minimizar impactos que prejudicam o ambiente e alijam as pessoas. Para tal, deixamos como recomendação:

> Evite aceitar as coisas sem questioná-las – teste-as antes. Nunca desista de aspirar ao aprimoramento pessoal, não importando em que fase da vida esteja: leia sempre, leia com espírito crítico, procure o significado das palavras que não conhece, para assim ampliar o vocabulário. Tenha consigo um bloquinho e faça desenhos (mesmo se já se convenceu de que não sabe desenhar); isso o tornará mais observador. Observe à maneira do cientista, usufrua à maneira do artista. Registre suas observações. Experimente, sabendo muitíssimo bem que alguns experimentos hão de fracassar. Entretanto, é assim que se alcança um conhecimento mais profundo. É importante ser curioso, é importante explorar diferentes mundos intelectuais – e é essencial buscar as correlações entre eles. O modelo que funcionou maravilhosamente bem para ele não fará jamais que nos tornemos outro Leonardo, um homem que tantos estudiosos consideram "o maior gênio que já existiu". Todavia, esse modelo não deixará de fazer que cada um de nós se torne muito mais criativo e seja mais ativo e efetivo no mundo intelectual que habitamos. (ATALAY, 2008, p.328-329).

5. Referências bibliográficas

ANTOCCIA, Luca et al. *Leonardo: arte e ciência – as máquinas.* Tradução: ANTUNES, Leonardo. São Paulo, Globo, 2004.

ATALAY, Bulent. *A Matemática e a Mona Lisa – a confluência da arte com a ciência.* 2ª edição. São Paulo: Novo Tempo. 2009

ÁVILA, Geraldo. *Análise Matemática para Licenciatura*. 3. ed. rev. e ampl. 4. Reimp. São Paulo: Edgard Blücher, 2011.

BAGNI, G.; D`AMORE, B. *Leonardo e a Matemática.* São Paulo: Livraria da Física. 2011.

BARBOSA, R. M. *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos*. São Paulo: Atual, 1993. 93p.

BARONI, R.L.; NASCIMENTO, V., M. dos. In: SAD, L.A. (org.). *Um tratamento, via medição, para os números reais.* Rio Claro (SP): Sociedade *Brasileira* de História da Matemática, 2005. (História da Matemática para professores).

BICUDO, Irineu (tradução). *Os Elementos*. São Paulo: EdUNESP, 2009.

BONGIOVANNI, Vincenzo. *O Teorema de Pitágoras: uma ligação entre uma propriedade angular e uma propriedade métrica.* In: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAIXQAK/demonstracao-teorema-pitagoras. Acesso em 23/06/2014.

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRANDÃO, Leônidas de Oliveira. *IMÁTICA*: *a Matemática interativa na internet – secção áurea.* In: http://www.matematica.br/historia/saurea.html. Visitado em 21/06/2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. *Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: quantificação, registros e agrupamentos.* Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília – MEC/SEB: 2014, 88p.

____. Ministério da Educação e do Desporto, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental*: *introdução.* Brasília, 1998a.

____. Ministério da Educação e do Desporto, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: temas transversais*. Brasília, 1998b.

____. Ministério da Educação e do Desporto, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental*. Brasília, 1998c.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989.

CHAVES, Rodolfo. *Ensino de Matemática nas escolas família agrícola.* Viçosa (MG): Mimeog. 2005. 202 p. (Material Pedagógico na Base Nacional Comum na linha da Pedagogia da Alternância).

________. *Por que anarquizar o ensino de matemática intervindo em questões socioambientais?* 223 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro – São Paulo. 2004.

CEZAR, Mariana dos Santos. *Produções de significados matemáticos na construção dos números reais.* 151 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – EDUCIMAT, Instituto Federal do Espírito Santo – IFES, Vitória. 2014.

DORIA, Celso Melchiades. *Geometrias Não-Euclideanas*: *exemplos*. In: http://www.bienasbm.ufba.br/M32.pdf. Visitado em 17/07/2014.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* Campinas (SP): Ed. Unicamp. 2004.

GUERATO, Elisabete. *A Matemática na Grécia: Tales, Pitágoras, Euclides, Arquimedes, Eratóstenes, Apolônio, Hiparco, Ptolomeu, Herão, Diofanto, Papus e Menelau*. In: http://www.cefetsp.br/edu/guerato/mathist/apresentacoes/a_matematica_na_grecia.pdf. Visitado em 16/06/2014.

HUISMAN, Denis. *Dicionário dos filósofos.* São Paulo: Martins Fontes, 2001.

LINS, Romulo Campos. *O modelo dos campos semânticos*: *estabelecimentos e notas de teorizações*. In: ANGELO, Cláudia Laus. (Org.) *Modelo dos campos semânticos e Educação Matemática*: *20 anos de história.* São Paulo: Midiograf, 2012, p. 11-30.

____. *Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática*. In: BICUDO, Maria Aparecida Vigggiani (Org.) *Pesquisas em Educação Matemática*: *concepções & perspectivas*. São Paulo: EdUNESP, 1999, p. 75-94. (Seminários & Debates).

LÍVIO, Mario. *Razão Áurea – a história de Fi, um número surpreendente.* 3ª edição. Rio de Janeiro: Record. 2008.

LOOMIS, Elisha Scott. *The Phitagorean Proposition*. 2. ed. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics,1968.

LOPEZ, Alvarez. *O enigma das pirâmides*. São Paulo: Hemus, 1978.

MOREIRA, N., C.; CABRAL, M. *Curso de Análise Real.* 2. ed. V. 2.4. Rio de Janeiro: Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, UFRJ, 2011.

PINTO, Nilda Helena S, Corrêa. *Desenho geométrico.* v.4 − teoria. 1 ed. São Paulo: Moderna, 1991.

SANTOS, Marconi Coelho dos; SILVA, Fernando Luiz Tavares da; LINS, Abigail Fregni. *Demonstrações do teorema de Pitágoras na perspectiva do Professor de Matemática.* Encontro Nacional de Educação, Ciência e Tecnologia da UEPB. Paraíba: (2012).

SILVA, Ana; PENA, Nuno. *Números, o levantar do veú.* http://www.mat.uc.pt/~mat1042/docs/am/RelatorioAM1Final.pdf, visitado em 13.06.2014.

SKOVSMOSE, Ole. *Cenários para investigação*. BOLEMA (PGEM/UNESP), n.14, p. 66-91. 2000.

TAHAN, Malba. *As maravilhas da Matemática.* 2. ed. Rio de Janeiro: Bloch, 1973.

WEIL, P.; D'AMBROSIO, U.; CREMA, R. *Rumo à nova transdisciplinaridade*: *sistemas abertos de conhecimentos*. 2. ed. São Paulo: Summus, 1993.

WHITE, Michael. *Leonardo – o primeiro cientista.* 2ª edição. Rio de Janeiro: Record. 2002.

ZAHN, Maurício. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.* Unimpa, Bagé, Rio Grande do Sul: Ciência Moderna. 2011.

ZALESKI FILHO, Dirceu. *Matemática e Arte.* São Paulo: Autêntica Editora. 2013. (Tendências em Educação Matemática).