

ISSN 2316-7785

## ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA: UMA PRÁTICA COM PROFESSORES

Juliana Machado Aguirre  
Instituto Federal Farroupilha/ Campus Júlio de Castilhos  
juliana.aguirre@iffarroupilha.edu.br

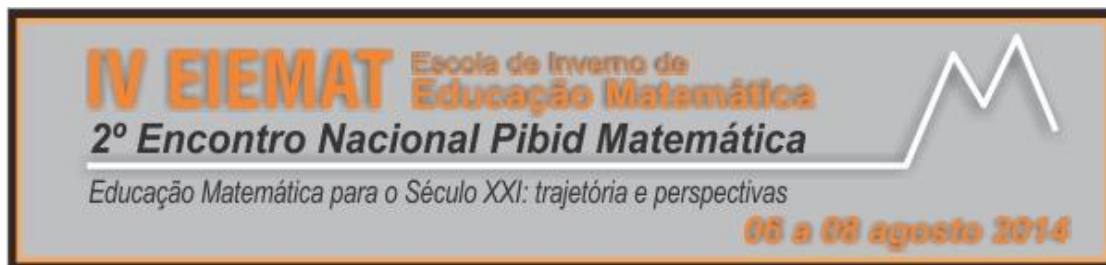
### Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo identificar as contribuições do *software* Geogebra para o ensino de sistemas lineares de duas equações como possibilidade exploratória em um curso de formação continuada de professores. A pesquisa ocorreu a partir de uma prática realizada com professores de Matemática da Rede Municipal de Ensino Fundamental do município de Santiago/RS, adotando para este estudo a abordagem de pesquisa qualitativa experimental na qual foram explorados problemas matemáticos envolvendo sistemas lineares de duas equações, utilizando-se um plano de investigação com o *software* GeoGebra. Os dados foram produzidos a partir da proposta exploratória e organizados em categorias de análise. Os resultados apontaram que o recurso potencializa, juntamente com as propostas e atividades estruturadas, o desenvolvimento da possibilidade de experimentação, da visualização e da articulação entre representações algébricas e gráficas simultaneamente. Neste sentido, torna-se um instrumento pedagógico para o ensino de sistemas lineares de duas equações e reforça a necessidade de reflexões e planejamentos de atividades como essa, que apresentamos na prática realizada com professores.

**Palavras-chave:** Formação de professores; *Software* GeoGebra; Sistemas lineares de duas equações; Representação gráfica.

As transformações ocorridas na sociedade com a evolução das tecnologias informáticas trazem possibilidades de ensino, e em especial para o ensino de Matemática, no qual uma grande variedade de programas e *softwares* estão dando significado diferenciado à aprendizagem de certos conhecimentos matemáticos.

Muitas vezes, para compreender os aspectos da Álgebra é importante o entendimento de conceitos algébricos, estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico e na percepção dos significados dos símbolos. Para Walle (2009, p.287), “longe de ser um tópico de pouco uso no mundo real, o pensamento algébrico penetra toda a Matemática e é essencial para torná-la útil na vida cotidiana”. No desenvolvimento do pensamento algébrico,



torna-se importante construir sentido do símbolo e uma condição necessária para que tal aconteça é a utilização de práticas de ensino onde o trabalho seja desenvolvido através de atividades de natureza investigativa e exploratória. Por isso, o professor nesse contexto é desafiado a rever e ampliar seus conhecimentos para enfrentar novas situações. A utilização de recursos tecnológicos no ensino, em especial do *software* GeoGebra abrange o desenvolvimento de um trabalho de reflexão da prática pedagógica proposta sendo que as atividades se interagem ao objetivo estabelecido de compreender os conceitos matemáticos estudados. Nesse sentido:

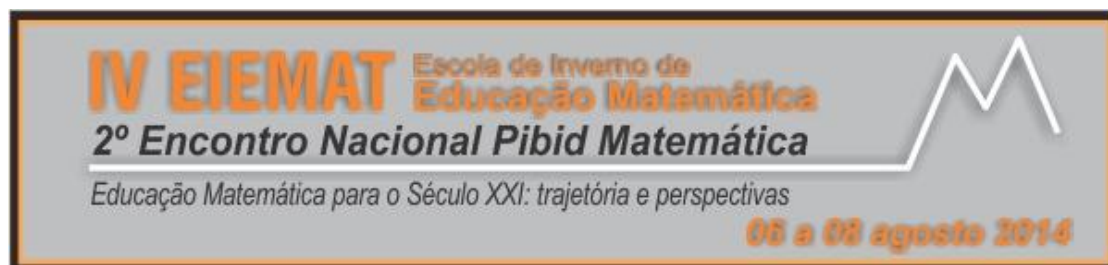
[...] o processo de inserção dos recursos tecnológicos na escola está envolvido por uma dinâmica de mudança, que abrange a prática, o professor e sua proposta pedagógica, ao desenvolver um trabalho em ambientes informatizados. Sinaliza-se, então, a necessidade de que os professores assumam posturas críticas e criativas, para que, através do uso de tecnologias, promovam um ensino que contribua para as mais variadas representações e reflexões em sala de aula. (SCHEFFER, 2001, p.24)

Para tanto, o papel do professor neste ambiente de aprendizagem é determinante para o sucesso na integração e interação que envolve o aluno, o professor e as tecnologias no estabelecimento de diferentes representações da Matemática.

Nesse contexto, estudos destacam a utilização adequada do computador nas aulas de Matemática com intuito de compor um cenário mais favorável e motivador ao seu ensino e aprendizagem. De acordo com Borba (2001), a utilização de novas mídias (o computador, por exemplo) traz significativas transformações no modo de pensar dos indivíduos e consequentemente no processo de construção do conhecimento.

A utilização do *software* GeoGebra nas construções algébricas pode propiciar discussão a respeito da compreensão de representações algébricas e gráficas, o que torna possível ampliar a evolução do pensamento algébrico e o desenvolvimento do raciocínio-dedutivo que forneça uma retomada de posição, favorável a prática pedagógica com tecnologias.

Esta pesquisa se propõe a investigar as contribuições do *software* GeoGebra para o ensino de sistemas lineares de duas equações apresentando possibilidades exploratórias em um curso de formação continuada de professores, adotando para este estudo a abordagem de pesquisa qualitativa experimental, que segundo Fiorentini (2006, p. 104), caracteriza-se pela realização de experimentos visando verificar a validade de determinadas hipóteses em relação a um fenômeno ou problema.



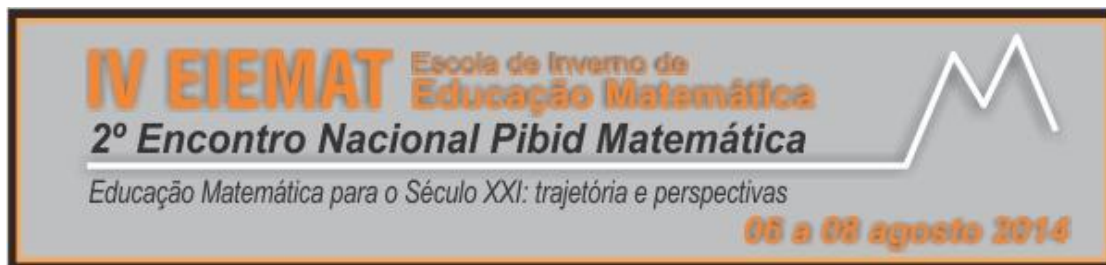
A partir da aplicação de instrumento (anexo 2) ao final de cada encontro com os professores foram produzidos os dados. Optando-se pelo anonimato dos sujeitos. Sendo assim, os instrumentos aplicados foram analisados e numerados de modo a facilitar o entendimento. Dessa forma, (P1.E1) se refere à resposta do Professor 1, para o instrumento aplicado no Encontro 1.

Os sujeitos da pesquisa, nos dados serão identificados por P (Professores) P1, P2, P3...

Na tabela a seguir apresenta-se o perfil dos sujeitos participantes do estudo.

	Formação Acadêmica	Ano	Idade	Tempo de atuação	Especialização Pós-Graduação/ Ano
P1	Licenciatura Plena em Matemática	2003	44 anos	23 anos	Não possui
P2	Licenciatura Plena em Matemática	2005	53 anos	26 anos	Não possui
P3	Licenciatura Plena em Matemática	2000	47 anos	11 anos	Especialização em Ciências e Matemática/2004
P4	Licenciatura Plena em Matemática	2001	34 anos	11 anos	Especialização em Psicopedagogia Institucional/2005
P5	Licenciatura Plena em Matemática	1999	51 anos	23 anos	Especialização em Matemática/2001
P6	Licenciatura Incompleta		50 anos	31 anos	Não possui
P7	Licenciatura Plena em Matemática	1999	37 anos	11 anos	Especialização em Matemática/2003
P8	Licenciatura Plena em Matemática	2001	35 anos	11 anos	Especialização em Psicopedagogia Institucional /2006

Tabela1- Perfil dos sujeitos estudados



Os dados produzidos na proposta exploratória com os professores no decorrer da prática foram organizados em categorias, que valorizam a descoberta, a interpretação e a compreensão do objeto em estudo. Segundo Franco (2008, p.60), “o processo da definição das categorias, na maioria dos casos implica idas e vindas da teoria, ao material de análise, do material de análise à teoria e pressupõe a elaboração quase sempre de várias versões do sistema categórico”.

As atividades desenvolvidas com os professores em cada um dos quatro encontros, conforme anexo 1 possibilitaram a organização dos resultados em categorias que contemplam a prática, a observação, os instrumentos de produção e a revisão teórica da pesquisa. Os dados foram apresentados nas seguintes categorias de análise: benefícios identificados no trabalho com pares ordenados no ambiente *software* GeoGebra; a representação gráfica de uma equação na tela do computador; representação gráfica de duas equações na tela do computador; vantagens e desvantagens ao trabalhar a resolução de sistemas de duas equações com o *software* GeoGebra; a resolução de problemas com *software* GeoGebra.

O trabalho com a utilização do *software* GeoGebra permitiu verificar que é possível identificar como se dá a aprendizagem devido à experimentação baseando-se na análise do desempenho, por exemplo da atividade 4 realizada por P7, FIGURA 1:

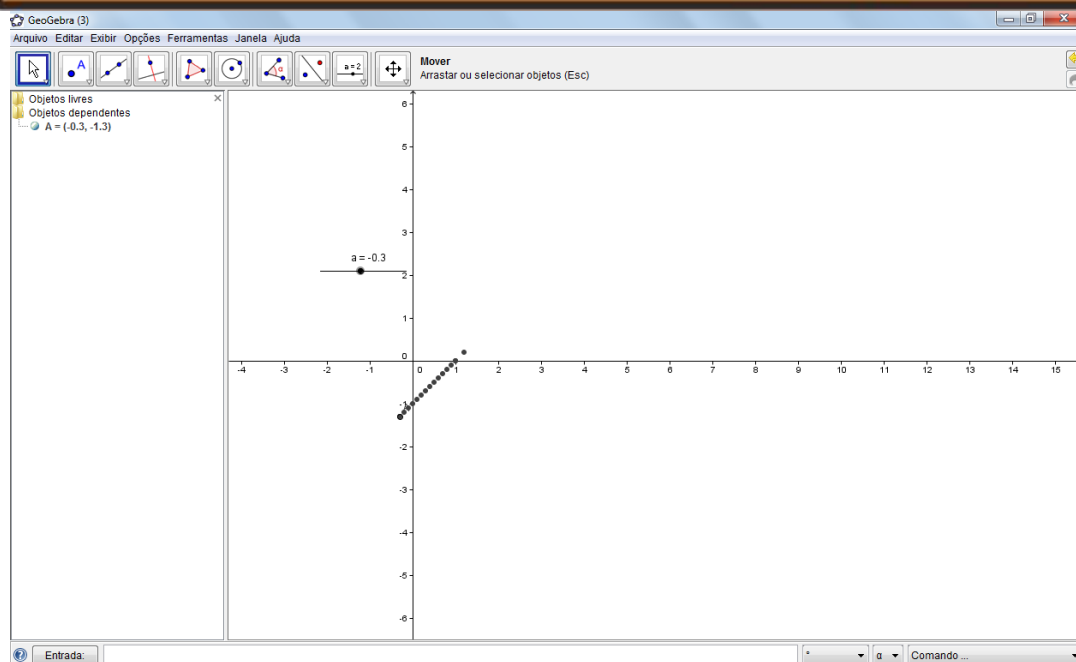
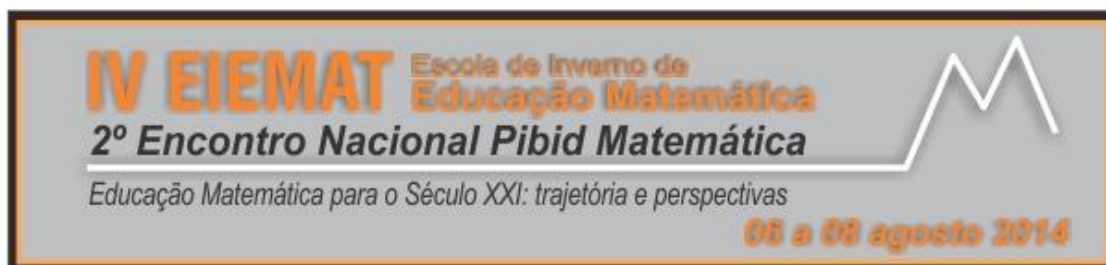


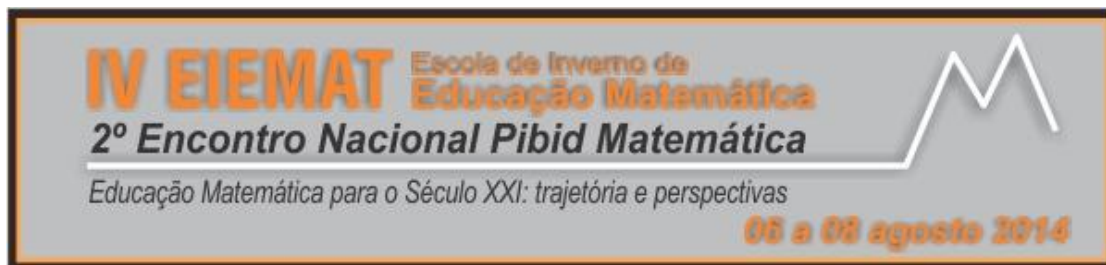
Figura 1 – Representação algébrica e geométrica de pontos determinados por  $(a, a-1)$

Fonte: *Software GeoGebra* atividade P7

O professor P7, com os pontos caracterizados na ferramenta habilitar rastro descreve uma equação de reta. Na ilustração FIGURA 1 a exploração realizada para  $a = -0,3$  destaca o par ordenado  $(-0,3; -1,3)$  na tela do *software* GeoGebra. As associações entre as variáveis e suas representações gráficas no trabalho caracterizam a mudança que contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A realização das atividades com simulações realizada pelos professores, em busca de resultados que satisfaçam os objetivos propostos com o uso da tecnologia, especificamente no *software* GeoGebra disponibiliza de forma simultânea a variedade de representações. Desta forma, a representação gráfica realizada pelo professor P7 contribui de maneira interessante ao realizar simulações na busca de resultados. O trabalho com o *software* GeoGebra promove maior reflexão, além da apresentação de definições, exploração e processos de resolução de problemas.

Neste contexto, torna-se relevante compreender de que modo os professores lidam com as representações quando trabalham com o GeoGebra, *software* que reúne ferramentas de Álgebra, Geometria e uma propriedade de cálculo oferecendo a possibilidade de explorar múltiplas representações.



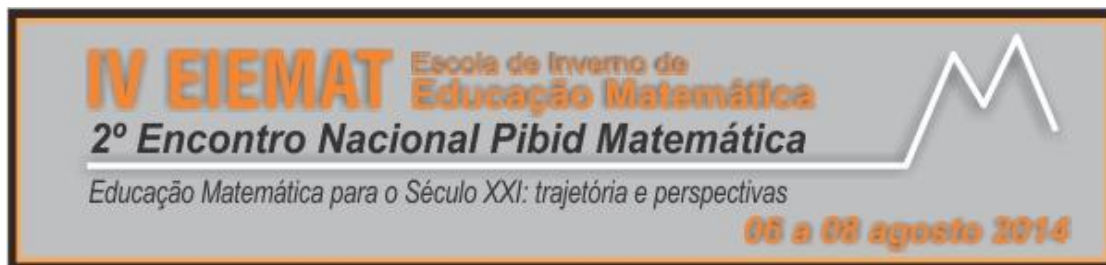
A realização de atividades com a resolução de sistemas de duas equações no *software* GeoGebra permite que os conhecimentos matemáticos sejam explorados simultaneamente devido à potencialidade do ambiente informatizado, a qual, de acordo com Borba (1999), torna-se aliada na construção do conhecimento.

O trabalho realizado, na resolução das atividades e na exploração do *software* GeoGebra com situações problemas, foi normalmente associado à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos, com ênfase à conexão da Matemática com o cotidiano. Nesse sentido, o desenvolvimento do pensamento algébrico é importante para a construção do pensamento matemático, pois permite realizar abstrações e generalizações, compreender o significado das operações e desenvolver a capacidade de representação que abrange a capacidade de discussão e organização de símbolos o que proporciona um trabalho com cálculos e a habilidade de lidar com estruturas matemáticas.

A realização das atividades com o *software* GeoGebra foi válida e, em geral, os professores aceitaram as propostas de ensino e demonstram, conforme Coscarelli (2002), “o trabalho com *software* promove o desafio de rever e ampliar conhecimentos no enfrentamento de novas situações de aprendizagem”.

Assim, o desafio consiste em estudar e propor alternativas de trabalho que levem a uma mudança na forma de dar aulas, envolvendo a tecnologia hoje disponível, propondo caminhos aos professores de Matemática. Sob essa ótica pretendeu-se refletir sobre o fazer educativo, buscando formas de ensinar e aprender Matemática, as quais possuam como suporte as tecnologias informatizadas.

O desenvolvimento do trabalho prático enfatizou contribuições das atividades com tecnologias informáticas sendo que o benefício de um trabalho com pares ordenados neste ambiente é a visualização gráfica. Assim como Walle (2009) afirma a visualização promove o desenvolvimento da noção de variável com o favorecimento da tecnologia às diferentes formas de representação. A colocação do professor P4 confirma os benefícios do trabalho. “A utilização da tecnologia informatizada nas atividades propostas apresenta uma ideia diferente de ensinar conceitos e propriedades matemáticas”. (P4.E2).



A discussão promovida nos encontros tornou-se fundamental, pois serviu de suporte para que determinadas ideias, relativas ao pensamento e simbologia algébrica e a perspectiva algébrica na resolução de situações problema, fossem desenvolvidas. Tais situações colaboraram para a (re)organização de práticas docentes. Com isso, as diferentes situações didáticas neste estudo caracterizam-se como potencialidades para a formação de professores.

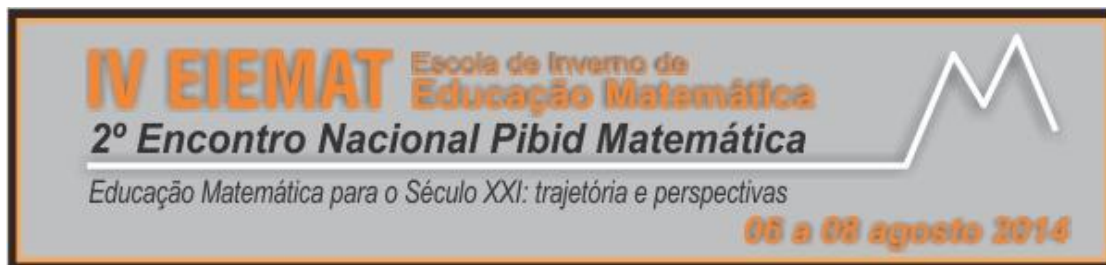
Esta pesquisa mostrou que, a formação continuada do professor, proporciona significação de conceitos matemáticos, agregando as potencialidades da tecnologia informatizada.

Deste modo, através das atividades didáticas envolvidas na produção de dados, os professores perceberam a importância do trabalho mediado pelas tecnologias informáticas, observando que o computador, por si só, não constrói conhecimento, e sim a interação do professor com o aluno e a tecnologia, dependendo de como as atividades forem objetivadas e planejadas para a aula.

O desafio em aprender a utilizar o *software* GeoGebra como ferramenta que conduz às investigações com descobertas, necessita que o professor esteja preparado e crie metodologias de ensino, tornando suas ações pedagógicas mais ricas na exploração de aspectos visuais e de representação, sendo que o *software* permite construir e explorar objetos geométricos e algébricos simultaneamente, favorecendo as abordagens dos conceitos e das representações estudadas, o que proporciona a aprendizagem.

Sendo assim, defende-se o uso de *softwares* educacionais para o ensino e para a aprendizagem da Matemática, pois estimulam o raciocínio, despertam a atenção para a construção de conhecimentos, além de ser um recurso de visualização dos conceitos matemáticos. Porém, o mesmo só trará benefícios se for explorado a partir de aulas organizadas, planejadas e objetivas.

A partir dos resultados foi possível observar, nas manifestações dos professores sujeitos da pesquisa, que o *software* GeoGebra, com suas ferramentas possibilita trabalhar com as várias representações de um mesmo objeto matemático simultaneamente.



### Referências bibliográficas

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

COSCARELLI, C. V. (Org.) Novas tecnologias, novos textos, novas formas de pensar. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

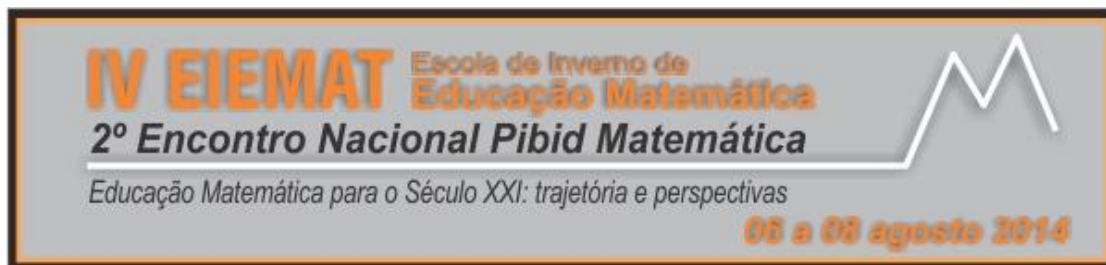
FIorentini, Dario; LOrenzato, Sergio. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Cmpinas: Autores Associados, 2006.

FRANCO, Maria Laura Puglisi Barbosa. Análise de conteúdo. 3.ed. São Paulo : Liber Editora, 2008.

SCHEFFER, N, F. Sensores Informática e Corpo: A Noção de Movimento no Ensino Fundamental. 2001, 242f (Dissertação de Mestrado em Matemática), UNESP, Rio Claro – SP, 2001.

WALLE, J. A. Van de. Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.





## ANEXO 1

Atividades Propostas no encontro 1:

1. Descubra a relação existente entre os números determinados pelos seguintes pares ordenados (12,0), (11,1), (10,2), (9,3), (8,4), (7,5), (6,6), (5,7), (4,8), (3,9), (2,10), (1,11), (0,12).

2. Represente os pares ordenados que satisfazem cada uma das seguintes equações:

a)  $-2x + y = 0$

b)  $x + y = 0$

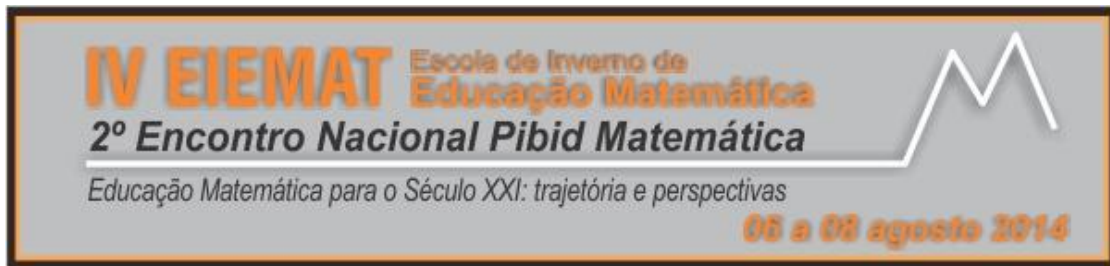
3. Complete o quadro e descubra as regularidades, escreva também a variável e a expressão algébrica correspondente.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	n
2	4	6										

4. Explore no Geogebra através da ferramenta “mover” ponto, os pares ordenados que contemplam a equação  $x + y = 6$ .

5. Situação-problema: Seis crianças querem brincar de duas brincadeiras diferentes, no pula-pula e na cama elástica. Mostre todos os modos diferentes em que as seis crianças podem fazer para brincar nos dois brinquedos.

Pula-pula	Cama elástica
3	3
5	1
0	6



6. Determine graficamente os seguintes pares ordenados no *software* GeoGebra:

$$(a, a - 1)$$

$$(a, a + 3)$$

Atividades Propostas no encontro 2:

1. Determine:

a) Cinco soluções da equação  $x + 2y = 5$ .

b) Marque os pontos correspondentes aos pares ordenados em um gráfico.

c) Trace a reta na qual estão esses pontos.

d) O ponto correspondente ao par ordenado  $(13, -4)$  pertence a essa reta?

e) O ponto correspondente ao par ordenado  $(-3, 12)$  pertence a essa reta?

2. Determine:

a) duas soluções da equação  $4x + 2y = 12$ .

b) Trace o gráfico das soluções.

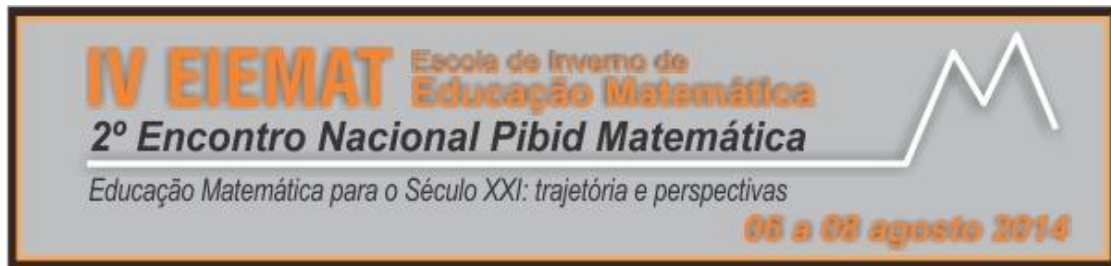
c) O ponto  $(3,0)$  pertence ao gráfico?

d) O ponto  $(0,4)$  pertence ao gráfico?

e) O par ordenado  $(1,4)$  é solução da equação?

f) O par ordenado  $(-17,40)$  é solução da equação?

3. Identifique e represente graficamente algumas soluções da equação  $x - y = -3$ .



4. Nos pares ordenados  $(x, y)$  abaixo, um dos valores foi dado. Determine o outro valor, de modo que o par ordenado seja solução de equação  $x + 2y = 7$ .

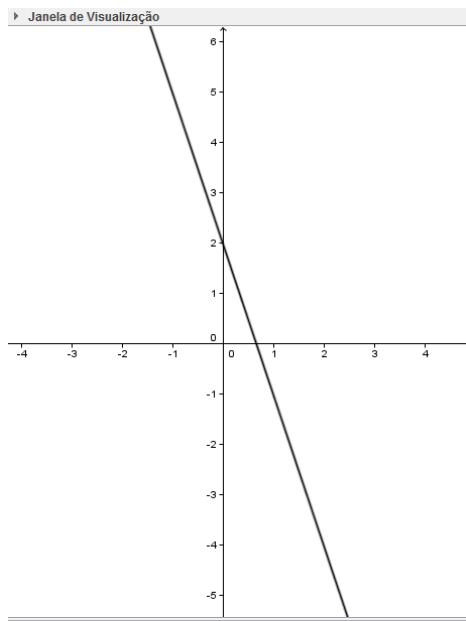
- a)  $(3, y)$     c)  $(x, 5)$   
 e)  $(x, 0)$
- b)  $(5, y)$     d)  $(9, y)$   
 f)  $(0, y)$

5. A tabela abaixo mostra pares correspondentes de duas grandezas relacionadas  $x$  e  $y$ .

X	3	4	5	6	7	8
Y	7	9	11	13	15	17

A representação algébrica da relação entre  $x$  e  $y$  pode ser expressa como:

- A)  $2x - y = 1$   
 B)  $-2x + y = -1$   
 C)  $2x - y = -1$   
 D)  $-2x - y = 1$



6. Dentre as equações abaixo, identifique aquela que melhor representa o gráfico mostrado abaixo.

A)  $-2x - y = -1$

B)  $-3x + y = -2$

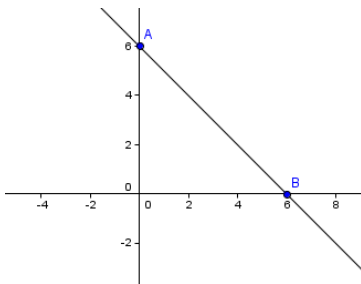
C)  $x + 2y = 0$

D)  $3x + y = 2$

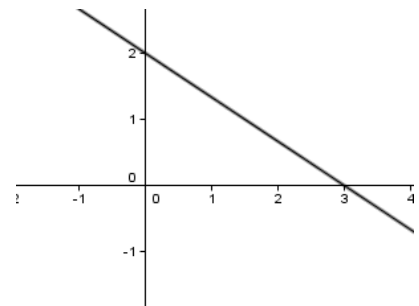
7. Qual dos gráficos seguintes representa a equação do 1º grau assim definida

$-2x + 3y = 6$ ?

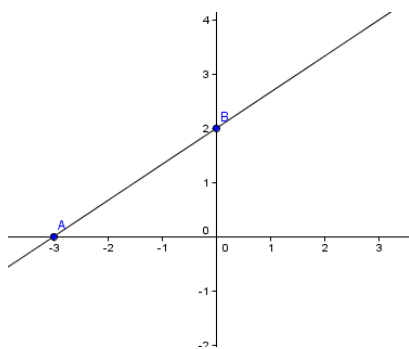
A)



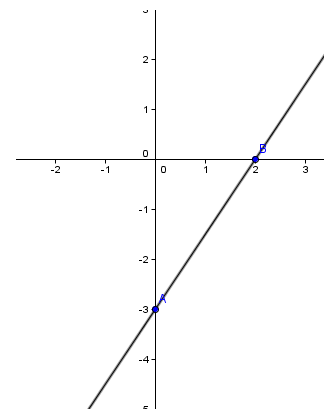
B)

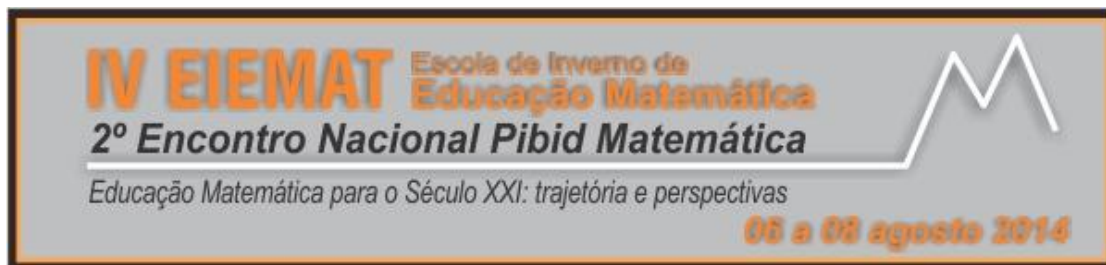


C)



D)





Atividades Propostas no encontro 3:

1. Considere o sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas: 
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$$

- a) Determine alguns pares ordenados que sejam soluções da equação  $x + y = 10$ .
- b) Determine alguns pares ordenados que sejam soluções da equação  $x - 2y = 16$ .
- c) Qual par ordenado é, ao mesmo tempo, solução das duas equações?
- d) Qual é a solução do sistema?
- e) Construa o gráfico correspondente e indique nele a solução do sistema.

2. Determine as soluções dos sistemas e registre geometricamente no *Software* GeoGebra.

a) 
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 12 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} y = 3x \\ x - y = -6 \end{cases}$$



$$g) \begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x = 5y \\ x - y = 12 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

3. Construa as duas retas e encontre graficamente a solução de cada um dos sistemas:

$$a) \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

4. Dos pares ordenados abaixo, qual é a solução do sistema  $\begin{cases} 2x + 5y = -14 \\ -3y = 24 \end{cases}$ ?

a) (2, 1)

b) (-3, 4)

c) (3, -4)

d) (-3, -4)

Compare sua resposta com a de um colega e veja como cada um pensou.

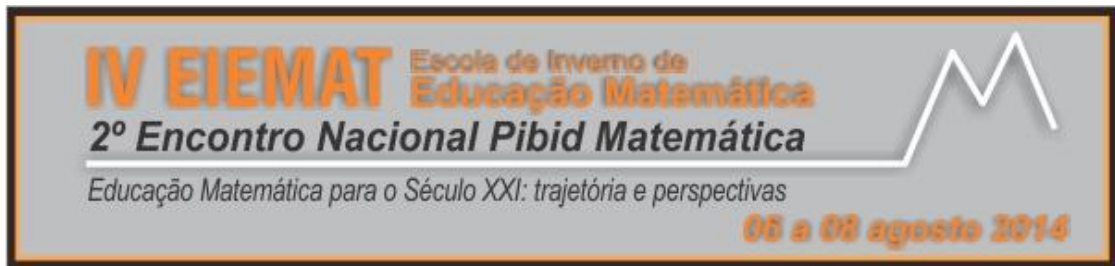
5. Represente no *Software* GeoGebra, os gráficos das equações de 1º grau definidas por:

$$3x - y = 0$$

$$3x - y = -1$$

$$3x - y = 3$$

a) O que se pode observar em relação às três retas?



- b) Identifique outra função do 1º grau que tenha a mesma relação verificada para as funções dadas.

6. Determine um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas cuja solução é o par ordenado (1,2). Represente graficamente.

Atividades Propostas no encontro 4:

1. Em uma partida de basquete, Rita e Vanessa marcaram juntas 20 pontos. Observe as várias possibilidades e complete a tabela o quadro.

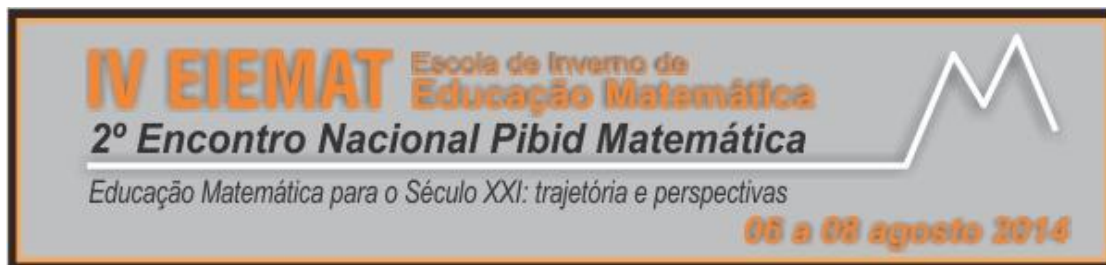
Pontos de Rita	Pontos de Vanessa	TOTAL de pontos
12	8	20
10	10	20
15	5	20
.....	.....	20
.....	.....	20
.....	.....	20

Qual foi a pontuação de cada uma delas, sabendo que Vanessa obteve o triplo da pontuação de Rita?

2. Uma herança de R\$ 50000,00 foi deixada para dois irmãos. No testamento, ficou estabelecido que o filho mais novo deveria receber R\$ 18 000,00 a mais do que o irmão. Qual é a parte que cabe a cada um?

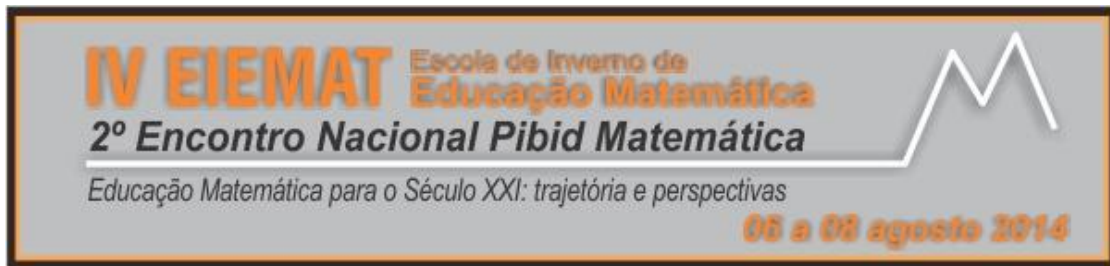
3. Camila e seu gato Fugi pesam juntos 32 kg. Camila pesa 7 vezes “peso” de Fugi. Quanto cada um pesa?

4. A soma de dois números é 62. A diferença entre eles é 8. Quais são esses números?

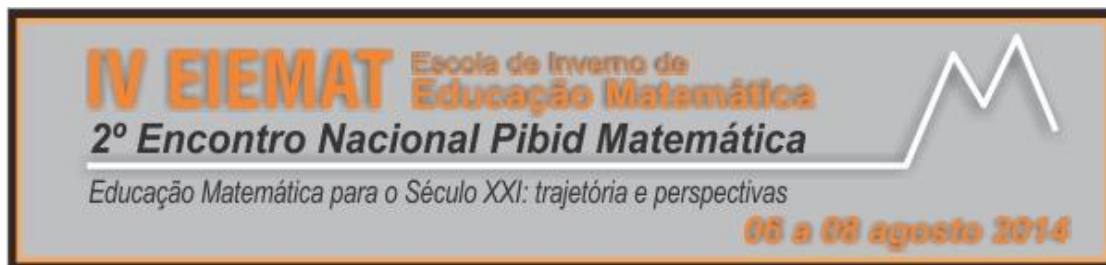


5. Sandra comprou um conjunto de calça e blusa. Pela calça, pagou o dobro do preço que pagou pela blusa. Deu em pagamento uma nota R\$ 50,00 e duas de R\$ 10,00, recebendo de troco uma nota de R\$ 5,00 e duas notas de R\$ 1,00. Quanto custou cada peça de roupa comprada por Sandra?
6. Antonio comprou tela de arame para cercar um terreno de formato retangular. Gastou 48m para cercá-lo e o fez de tal forma que o comprimento resultou no triplo da largura. Quais as dimensões desse terreno?
7. Fui ao banco e retirei R\$ 270,00 para pagar o aluguel. Ao todo, o caixa me deu 11 notas, entre notas de R\$ 10,00 e R\$ 50,00. Quantas notas de R\$ 10,00 ele me deu? O caixa poderia ter me dado uma nota de R\$ 50,00 a mais? Qual seria então o número de notas de R\$ 50,00 e de R\$ 10,00?
8. Luís comprou um livro e um CD para seu neto e pagou R\$ 35,00. Roberto comprou dois livros e um CD do mesmo tipo e pagou R\$ 55,00. Qual é o preço do CD? E do livro?
9. Ana e Marcelo economizaram suas mesadas para comprar um presente para o pai deles. Juntando a quantia dos dois, dá para comprar um tênis que custa R\$ 55,00 e não sobra troco. A quantia que Ana tem ultrapassa em R\$ 21,00 a quantia de Marcelo. Quantos reais tem cada um?





10. Em um triângulo isósceles de perímetro 15 cm, um dos lados tem a metade da medida de cada um dos outros dois. Quanto mede os lados desse triângulo? Represente geometricamente no Software GeoGebra.
11. Determine o comprimento ( $c$ ) e a largura ( $l$ ) de um retângulo áureo cujo perímetro é 26 cm.  
Lembre-se: No retângulo áureo  $c/l = 1,6$ .
12. Beto fez uma prova de Matemática com o seguinte sistema de avaliação: em cada questão certa o aluno ganha 5 pontos e em cada questão errada são descontados 3 pontos. Na prova com 10 questões, a pontuação de Beto foi 26 pontos.
- \*Quantas questões Beto acertou? Quantas ele errou?
  - \*Qual foi a pontuação máxima dessa prova?
  - \*Qual seria a pontuação de Beto se ele acertasse 5 questões e errasse 5?



## ANEXO 2

### Questionamentos

Encontro1: Quais os benefícios identificados ao trabalhar pares ordenados com o *software* GeoGebra?

Encontro2: Como você vê a representação gráfica das funções com o *software* GeoGebra?

Encontro 3: Quais as possibilidades de representações de duas equações com *software* GeoGebra?

Encontro 4: Quais as vantagens e desvantagens de trabalhar com o tema sistemas lineares de duas equações utilizando o *software* GeoGebra?