Universidade Federal de Santa Maria - CCNE
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Prova Escrita de Seleção - 15/06/2018
Mestrado em Matemática - Seleção 2018.2

Nome:____

Orientações:
- Esta prova tem frente e verso, com 09 (nove) questões no total.
- Resolver as questões nas folhas indicadas, utilizando o verso se necessário.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- A duração da prova é de no máximo 5 horas.

Álgebra Linear

Notações:

- $\mathbb{R}$ denota o corpo dos números reais;
- Neste exame, todos os espaços vetoriais são de dimensão finita e reais, isto é, os escalares são tomados em $\mathbb{R}$;
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $T^n = T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T$ denota a composição da função T com ela mesma, n vezes;
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ denota o espaço vetorial das matrizes de ordem $n \times n$, com entradas em $\mathbb{R}$;
- Dados V um espaço vetorial, $v \in V$ e β uma base qualquer de V, $[v]_\beta$ denota as coordenadas do vetor v em relação a base β.

Questão 1. Seja V um espaço vetorial e $u, v \in V$, vetores não nulos.

(a) (0,2) Prove que se $\{u, v\}$ é linearmente dependente então um dos vetores é múltiplo escalar do outro.

(b) (0,3) Suponha que $V = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2) \in V$ tais que $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$ e $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$. Prove que $\beta = \{u, v\}$ é uma base de V.

Questão 2. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ dados por

$$W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4,\ x + z + w = 0\} \text{ e}$$

$$W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - y + w = 0 \text{ e } x + y + 3z + 2w = 0\}.$$

Sabendo que W_2 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$:

(a) (0,2) Mostre que W_1 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) (0,4) Determine os subespaços $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

(c) (0,2) Exiba uma base e dê dimensão dos subespaços obtidos no item (b) .

Questão 3. Seja $W = M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ o espaço das matrizes coluna. Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, então a aplicação $L_A : W \to W$ dada por $L_A(X) = AX$, para todo $X \in W$, define um operador linear sobre W.

(a) (0,3) Prove que todo operador linear sobre W é da forma L_A, para alguma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(b) (0,3) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja β uma base de V. Defina a aplicação $U : V \to W$ dada por $U(v) = [v]_\beta$, para todo $v \in V$. Prove que U é um isomorfismo de espaços vetoriais.

(c) (0,3) Se T é um operador linear sobre V, então a composição UTU^{-1} é um operador linear sobre W. Pelo item (a), UTU^{-1} é dado pela multiplicação à esquerda de alguma matriz A. Exiba tal matriz.

Questão 4. Seja V um espaço vetorial e T um operador linear sobre V.

$a)$ (0,3) Prove que se λ é autovalor de T então λ^n é autovalor de T^n.

$b)$ (0,5) Seja $V = \mathbb{R}^2$, e T um operador linear sobre V definido por $T(x, y) = \left(\dfrac{5x + 3y}{4}, \dfrac{3x + 5y}{4}\right)$. Mostre que T é diagonalizável e calcule $T^{10}(v)$, onde $v = (5, 1)$.

Questão 5. (1,0) Disserte sobre o tema núcleo e imagem de uma transformação linear. Nesta questão, sugerimos que sejam abordados os seguintes tópicos: definição, exemplos, teorema do núcleo e da imagem e consequências deste resultado.

Análise Real

Notações:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ representa o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{R}$ denota o corpo dos números reais;
- $\lim a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ representa o limite da sequência (a_n);

Questão 6. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Demonstre a(s) afirmação(ções) verdadeira(s) e exiba um contraexemplo para a(s) falsa(s).

(a) (0,3) Se (a_n) é uma sequência com $\lim a_n = 0$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) (0,4) Se $D \subset \mathbb{R}$ é um conjunto tal que o fecho de D é $\mathbb{R}$, então D é não enumerável.

(c) (0,3) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $x_0 \in \mathbb{R}$, então f é contínua em x_0.

Questão 7.

(a) (0,5) Mostre que se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos abertos em $\mathbb{R}$, então $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

(b) (0,5) Se $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de abertos em $\mathbb{R}$, onde I é um conjunto de índices arbitrário, podemos afirmar que $\displaystyle\bigcap_{j \in I} A_j$ é aberto em $\mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

Questão 8. (1,0) Abaixo apresentamos uma definição:
Definição: *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita contínua em $a \in \mathbb{R}$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*
Dizemos que f é contínua em $\mathbb{R}$ se ela for contínua em a para todo a pertencente a $\mathbb{R}$.

Mostre que uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}$ se, e somente se, para todo conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}$, sua imagem inversa é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Questão 9. (1,0) Disserte sobre o Teorema do Valor Médio. Nessa questão sugerimos que sejam abordados o enunciado e a demonstração do teorema, bem como suas aplicações.