Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Prova de Seleção Escrita
Mestrado em Matemática - 2012/1

Orientações:
- Resolver as questões nas folhas indicadas.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- Evitar rasuras e resolver claramente.
- A duração da prova é de no máximo 5 horas.
- A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Notação: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são os conjuntos dos números naturais, racionais e reais, respectivamente.

Valor da questão 1: 0,8 pontos

1. Dados $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ e $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, suponhamos que $\ll u, v \gg = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i v_j$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, define um produto interno em $\mathbb{R}^n$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.
   (a) *(0,2)* Defina produto interno em um espaço vetorial V sobre um corpo F.
   (b) *(0,3)* Mostre que $a_{ii} > 0$, $1 \leq i \leq n$.
   (c) *(0,3)* Mostre que $a_{ij} = a_{ji}$, para qualquer $1 \leq i, j \leq n$.

Valor da questão 2: 0,8 pontos

2. Se $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ é uma matriz 2×2, definimos o seu traço por $tr(\mathrm{A}) = a_{11} + a_{22}$.
   (a) *(0,2)* Mostre que o conjunto V das matrizes que tem traço igual a zero é um subespaço vetorial de $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (b) *(0,2)* Se $tr(\mathrm{A}) = 0$ e $\det(\mathrm{A}) = 0$ então o único autovalor de A é $\lambda = 0$.
   (c) *(0,4)* Mostre que se $tr(\mathrm{A}) = 0$ e $\det(\mathrm{A}) = 0$, então $\mathrm{A}^2 = 0 \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Valor da questão 3: 1,0 pontos

3. Seja $\beta = \{1, e^t, te^t\}$ uma base do espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{R}$. Dado um número real c, considere $T : V \to V$ o operador definido por
$$T[f](t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + cf(t).$$
   (a) *(0,2)* Mostre que T é um operador linear.
   (b) *(0,4)* Obtenha a matriz que representa o operador T na base β.
   (c) *(0,4)* Para quais valores de c temos que T não é bijetora?

Valor da questão 4: 0,8 pontos

4. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$. Prove que se $T : V \to W$ é uma aplicação linear, então
$$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim V.$$

Valor da questão 5: 1,6 pontos

5. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Um elemento de $(\mathbb{R}^n)^*$ é uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

   (a) *(0,8)* Dado $u \in \mathbb{R}^n$ qualquer, seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \langle x, u \rangle$. Mostre que $g \in (\mathbb{R}^n)^*$. Temos que g é injetora? E sobrejetora? Justifique!

   (b) *(0,8)* Dado $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, mostre que existe $v_f \in \mathbb{R}^n$ onde $f(x) = \langle x, v_f \rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Valor da questão 6: 0,8 pontos

6. (a) *(0,3)* Defina o que vem a ser um conjunto enumerável em $\mathbb{R}$.

   (b) *(0,5)* Mostre que se A e B são conjuntos enumeráveis de $\mathbb{R}$ então $A \cup B$ é enumerável.

Valor da questão 7: 0,8 pontos

7. Uma sequência $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ é dita *sequência de Cauchy* se para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

   (a) *(0,2)* Mostre que se $(x_n)_n$ é convergente então $(x_n)_n$ é uma *sequência de Cauchy.*

   (b) *(0,6)* Mostre que se $(x_n)_n$ é uma *sequência de Cauchy* então $(x_n)_n$ é convergente.

Valor da questão 8: 1,0 pontos

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{q}, & \text{se } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}. \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$

   (a) *(0,5)* Mostre que f é contínua em $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ e descontínua em $\mathbb{Q}$.
   Sugestão: Verifique que se $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ e $(\frac{p_n}{q_n}) \subset \mathbb{Q}$ com $\frac{p_n}{q_n} \to x$, então $q_n \to \infty$.

   (b) *(0,5)* A função f é integrável em $[0, 1]$? Justifique!

Valor da questão 9: 0,5 pontos

9. Suponha que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ seja derivável, com $f(0) = 0$, e que $f' : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ seja crescente. Mostre que a função $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ é crescente em $(0, \infty)$.

Valor da questão 10: 0,9 pontos

10. (a) *(0,3)* Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas, com $g(a) < f(a)$ e $f(b) < g(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

    (b) *(0,6)* Sendo $D = \mathbb{R} \backslash \{\pm k\pi : k \in \mathbb{N}\}$, através do item *(a)* mostre que a função $h : D \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x - cotg(x)$ possui infinitas raízes.

Valor da questão 11: 1,0 pontos

11. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que f é integrável em $[a, b]$.