Universidade Federal de Santa Maria - CCNE
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Prova Escrita de Seleção
Mestrado em Matemática - 2017.1

Nome:____

Orientações:
• Esta prova tem frente e verso, com 10 questões no total.
• Resolver as questões nas folhas indicadas, utilizando-se o verso se necessário.
• Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
• A duração da prova é de no máximo 5 horas.
• A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Tópicos de Análise na Reta

Notações

- $\mathbb{R}$ denota o corpo dos números reais e $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ denota o conjunto dos números naturais;
- $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ representa uma sequência em $\mathbb{R}$;
- (a_n) é não decrescente $\Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$;
- $\sup A$ e $\inf A$ denotam respectivamente, o supremo e o ínfimo de um conjunto A.

Questões

1. (***1,0***) Seja (a_n) uma sequência em $\mathbb{R}$, com $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) (0,5) Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, então prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) (0,5) Suponha que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja uma série convergente. Prove que se (b_n) é uma sequência limitada, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ também é convergente.

2. (***1,0***) Seja (a_n) uma sequência não decrescente em $\mathbb{R}$. Prove que se (a_n) possui uma subsequência limitada, então
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}.$$
A partir disso, determine $\sup\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, justificando sua resposta.

3. (***1,0***) Enuncie e prove o Teorema do Sanduíche para funções reais, de uma variável real. A seguir, utilize este teorema para provar que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$
então f é constante.

4. (***1,0***) Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $p \in (1, +\infty)$ e $q \in \mathbb{R}$, tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Prove que
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$
Sugestão: Utilize a função auxiliar $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{1}{q} - x$.

5. (***1,0***) Resolva cada um dos itens abaixo, relacionados à conceitos topológicos:

(a) (0,3) Defina conjunto compacto em $\mathbb{R}$ e prove que se $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua, com $K \subset \mathbb{R}$ compacto, então $f(K)$ também é compacto;

(b) (0,2) O conjunto $S = \{x \in [0,1]; e^x cos\sqrt{x^2+1} \leq 1\}$ é compacto? Justifique sua resposta.

(c) (0,3) Prove que se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, então toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ possui um valor máximo e um valor mínimo.

(d) (0,2) Se S é o conjunto dado no item (b), então mostre que a função $f : S \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = arctg(x) + x^3$, para todo $x \in S$, é limitada.

Álgebra Linear

Notações

- Nesta prova, todos os espaços vetoriais são reais, isto é, os escalares são tomados em $\mathbb{R}$;
- $Im(T)$ é a imagem e $Ker(T)$ é o núcleo de uma transformação linear T;
- $dimV$ denota a dimensão de um espaço vetorial V;
- p' representa a derivada de p.

Questões

6. (***1,0***) Sabe-se que $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$ é um espaço vetorial real, munido das seguintes operações: $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, definidas, respectivamente, por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) \text{ e } \alpha \cdot (x_1, y_1) = (x_1^\alpha, y_1^\alpha),$$

para quaisquer $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) (0,25) Prove a propriedade distributiva da multiplicação por escalar pela soma. Além disso, determine o elemento neutro da soma e o simétrico de um vetor $(x, y) \in V$;

(b) (0,25) Exiba uma base de V e dê sua dimensão;

(c) (0,25) Determine as coordenadas do vetor $v = (3, 5)$, com relação à base obtida no item anterior;

(d) (0,25) O conjunto $U = \{(1, 2^x); x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V? Justifique.

7. (***1,0***) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações abaixo. Prove as verdadeiras e dê contra-exemplo para as falsas.

( ) (0,25) A união de dois conjuntos linearmente independentes de um espaço vetorial V é ainda um conjunto linearmente independente;

( ) (0,25) O vetor $w = (2, 3, -1)$ pertence ao subespaço gerado por $u = (1, 0, 0)$ e $v = (1, 1, 0)$;

( ) (0,25) Para todo operador linear $T : V \to V$, temos $V = Ker(T) \oplus Im(T)$;

( ) (0,25) Se a transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetiva, então $dimIm(T) = m$.

8. (***1,0***) Sejam V um espaço vetorial real e W_1, W_2 subespaços vetoriais de V.

(a) (0,5) Prove que $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, todo vetor $v \in V$ se escreve de modo único como $v = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$;

(a) (0,5) Seja V o espaço vetorial real das matrizes reais $n \times n$. Exiba subespaços vetoriais W_1 e W_2 de V, tais que $V = W_1 \oplus W_2$.

9. (***1,0***) Seja $\mathcal{P}_5$ o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor do que, ou igual a 5, com coeficientes em $\mathbb{R}$. Se $T : \mathcal{P}_5 \to \mathcal{P}_5$ é definida por

$$T(p(x)) = 3p'(x) + 5p(x), \ \forall \ p(x) \in \mathcal{P}_5,$$

então mostre que T é um isomorfismo.

10. (***1,0***) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, com $T(1, -1) = (2, 3)$ e $T(2, 1) = (3, 2)$. Prove que T é diagonalizável.