Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Prova de Seleção Escrita
Mestrado em Matemática - 2009/1

Orientações:

- Resolver cada questão em folha separada.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- Evitar rasuras e resolver claramente.
- A duração da prova é no máximo 5 horas.
- A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Valor da questão 1: 2,0 pontos

1. Responda Verdadeiro (V) ou Falso (F) nos itens abaixo, justificando suas respostas.

   (a) ***(0,5)*** Seja $A \subset \mathbb{R}$ tal que A possui um elemento máximo a. Então $\sup A = a$.

   (b) ***(0,5)*** A seqüência $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad n \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}$ é convergente.

   (c) ***(0,5)*** Seja $f : [-L, L] \to \mathbb{R}, \ L > 0$ uma função par. Então $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_0^L f(x)dx$.

   (d) ***(0,5)*** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 1$.

Valor da questão 2: 1,2 pontos

2. (a) ***(0,6)*** Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$.

   (b) ***(0,6)*** Prove que $\forall \ a, b \in \mathbb{R}$ vale $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

Valor da questão 3: 1,8 pontos

3. (a) ***(0,6)*** Mostre que $e^x \geq 1 + x$ para todo x real não negativo.

   (b) ***(0,6)*** Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

   é derivável com derivada primeira contínua.

(c) ***(0,6)*** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua . Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Sugestão: Tome uma primitiva de f e aplique o teorema do valor médio.

Valor da questão 4: 1,8 pontos

4. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e T uma transformação linear de V em W.

   (a) ***(0,6)*** Mostre que o núcleo de T e a imagem de T são subespaços vetoriais de V.

   (b) ***(1,2)*** Dado o vetor unitário $u = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(v) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}\, u$, projeção ortogonal de v sobre o eixo de u. Mostre que $T^2(v) = T(v)$, determine o núcleo de T, a matriz de T e a matriz $H = I - 2T$ na base canônica.
   (A matriz H é conhecida como uma matriz de Householder).

Valor da questão 5: 1,7 pontos

5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F.

   (a) ***(0,5)*** Mostre que os autovalores de um operador nilpotente são todos nulos. (T é um operador nilpotente sobre V se existe r inteiro tal que $T^r = 0$).

   (b) ***(1,2)*** Seja T um operador linear sobre V, tal que *posto* $(T) = 1$. Usando o item a), mostre que se T não é nilpotente, então T é diagonalizável.

Valor da questão 6: 1,5 pontos

6. Nos itens abaixo, considere A, B, K e I matrizes $n \times n$, onde I é a matriz identidade.

   (a) ***(0,5)*** Seja K uma matriz anti-simétrica, isto é, $K^T = -K$. Suponha que $I - K$ é não-singular. Mostre que $(I + K)$ é não-singular. Se $B = (I + K)(I - K)^{-1}$, mostre que $B^T B = BB^T = I$.

   (b) ***(0,5)*** Se M é uma matriz anti-simétrica então $I + M$ e $I - M$ são não-singulares. Demonstre esta afirmação nos casos em que M é uma matriz de ordem 2×2 e 3×3.

   (c) ***(0,5)*** Mostre que se A, B e $A + B$ possuem inversas, então o mesmo acontece com $(A^{-1} + B^{-1})$ e $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$.