Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Prova de Seleção Escrita

Mestrado em Matemática - 2010/1

Orientações:

• Resolver cada questão em folha separada.
• Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
• Evitar rasuras e resolver claramente.
• A duração da prova é no máximo 5 horas.
• A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Valor da questão 1: 1,5 pontos

1. Seja $\{a_n\}$ uma sequência dada recursivamente por $a_1 = \sqrt{3}$ e $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$, $n > 1$. Mostrar que $\{a_n\}$ é convergente. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Valor da questão 2: 2,0 pontos

2. (a) ***(0,4)*** Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, caracterize ponto interior e ponto de fronteira de A.

   (b) ***(0,8)*** Sejam $A = [a, b]$ um intervalo fechado e $f : A \to A$ uma função contínua. Mostre que f tem um ponto fixo em A, ou seja, existe $c \in A$ tal que $f(c) = c$.

   (c) ***(0,8)*** Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que, se $f'(x) = 0$ para todo x no interior de I, então f é constante.

Valor da questão 3: 1,5 pontos

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + |x|^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se}\, x \neq 0 \\ \\ k, & \text{se}\, x = 0. \end{cases}$$

   (a) ***(0,75)*** Qual o valor de k que torna f contínua?

   (b) ***(0,75)*** A funcão f, com k escolhido no item anterior, é derivável?

Valor da questão 4: 1,8 pontos

4. Considere o operador linear P que projeta o vetor $(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5$, no plano $\pi : \begin{cases} z = ax + by \\ t = 0 \\ w = 0 \end{cases}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$,
isto é, $P(x, y, z, t, w) = (x, y, ax + by, 0, 0)$.

   (a) ***(0,6)*** Calcule a dimensão do núcleo e a dimensão da imagem de P e exiba uma base para cada um deles.

   (b) ***(0,6)*** Encontre o polinômio característico de P.

   (c) ***(0,6)*** Mostre que P é diagonalizável.

Valor da questão 5: 1,8 pontos

5. Seja V o espaço vetorial real dado pelas funções contínuas no intervalo $[0, 2\pi]$.

   (a) ***(0,6)*** Mostre que $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$ é um produto interno em V.

   (b) ***(0,6)*** Exiba dois vetores não nulos ortogonais em relação ao produto interno dado no item (a).

   (c) ***(0,6)*** Considere $[f, g] = \int_0^{2\pi} f(x)g(2\pi - x)\, dx$. Então $[f, g]$ define um produto interno em V?

Valor da questão 6: 1,4 pontos

6. Prove que matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico. Use isso para provar que se V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e T um operador linear definido sobre V, então $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ produzem os mesmos autovalores para α e β bases quaisquer.