

Prova de Seleção Escrita Mestrado em Matemática - 2011/1

Orientações:

- Resolver as questões nas folhas indicadas.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- Evitar rasuras e resolver claramente.
- A duração da prova é de no máximo 5 horas.
- A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Notação: $\mathbb{Q}$ conjunto dos números racionais, $\mathbb{R}$ conjunto dos números reais.

Valor da questão 1: 2,5 pontos

1. Seja $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $T_A(X) = AX$ onde A é uma matriz quadrada de ordem n com $\det A \neq 0$. Defina em $\mathbb{R}^n$ o produto interno canônico:

$$\langle X, Y \rangle = Y^T X.$$

- (a) (0,4) Prove que T_A é linear.
- (b) (0,4) Determine o núcleo e a imagem de T_A .
- (c) (0,4) T_A é inversível? Justifique.
- (d) (0,5) Que condições devemos impor a matriz A para que $\|T_A(X)\| = \|X\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana.
- (e) (0,8) Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalores reais e distintos de A . Prove que a solução do sistema $AX = B$ é

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{\langle B, v_i \rangle}{\lambda_i \langle v_i, v_i \rangle} v_i.$$

Valor da questão 2: 2,5 pontos

2. Seja A uma matriz real de ordem $m \times n$, e B a matriz em blocos dada por

$$B = \begin{pmatrix} 0_m & A \\ A^T & 0_n \end{pmatrix},$$

onde 0_m indica a matriz nula de ordem m , 0_n indica a matriz nula de ordem n e A^T é a matriz transposta de A . Seja $v = (v_1, v_2)^T$ um autovetor de B correspondente ao autovalor λ , sendo v_1 e v_2 vetores com m e n coordenadas, respectivamente.

- (a) $(0,5)$ Mostre que $-\lambda$ também é autovalor de B .
 - (b) $(0,5)$ Mostre que λ^2 é autovalor de $A^T A$ e de AA^T .
 - (c) $(0,5)$ Mostre que B é uma matriz simétrica.
 - (d) $(1,0)$ Se A é a matriz identidade de ordem 2, ($A = I, 2 \times 2$) determine os autovalores e autovetores de B , usando os itens acima.
-

Valor da questão 3: 1,0 pontos

3. Faça o gráfico da função $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Prove que sua imagem é o intervalo $|y| < 1$. Prove que ela é injetiva e calcule sua inversa.
-

Valor da questão 4: 1,0 pontos

4. Considere o conjunto $X = \{1 - \frac{1}{3n^2}; n \in \mathbb{N}\}$.
- (a) $(0,5)$ Mostre que $\sup X = 1$.
 - (b) $(0,25)$ Mostre que a sequência $x_n = 1 - \frac{1}{3n^2}$ converge para 1.
 - (c) $(0,25)$ O conjunto X é compacto em $\mathbb{R}$? Justifique.
-

Valor da questão 5: 0,5 pontos

5. Prove que toda coleção de abertos dois a dois disjuntos e não vazios de $\mathbb{R}$ é enumerável.
-

Valor da questão 6: 1,5 pontos

6. Identifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta:
- (a) $(0,3)$ Toda sequência monótona limitada é convergente.
 - (b) $(0,3)$ Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ converge então $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge.
 - (c) $(0,3)$ Se a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $c \in (a, b)$, e $f'(c) = 0$ então f tem um extremo relativo em c .
 - (d) $(0,3)$ Se $X \subset \mathbb{Q}$ e X é limitado, então existe $b \in \mathbb{Q}$ tal que $b = \sup X$.
 - (e) $(0,3)$ Toda função integrável à Riemann em $[a, b]$ possui primitiva em $[a, b]$.
-

Valor da questão 7: 1,0 pontos

7. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, com $f(a) = f(b)$. Mostre que existe um $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.