

Seleção Escrita - Prova 1 - Curso de Verão Mestrado em Matemática - 2011/1

Orientações:

- Resolver as questões nas folhas indicadas.
 - Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
 - Evitar rasuras e resolver claramente.
 - A duração da prova é de no máximo 3 horas.
 - A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.
-

Valor da questão 1: 1,0 pontos

1. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$.
-

Valor da questão 2: 2,0 pontos

2. Considere $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em $X \subset \mathbb{R}$, com $X \neq \emptyset$.
 - (a) Mostre que se f e g são não-negativas e limitadas superiormente então $fg : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada superiormente e $\sup(fg) \leq \sup f \sup g$.
 - (b) Dê exemplos mostrando que pode ocorrer $\sup(fg) < \sup f \sup g$.
-

Valor da questão 3: 1,0 pontos

3. Seja (a_n) a sequência definida indutivamente por:
 $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, para $n > 1$.
 - (a) Mostre, por indução, que $a_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Mostre que (a_n) é crescente (sugestão: verifique que $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n) > 0$, para $n \geq 1$, então $a_{n+1} > a_n$).
 - (c) Conclua, pelos itens anteriores, que (a_n) é convergente e calcule seu limite.

Valor da questão 4: 2,0 pontos

4. Dizemos que (a_n) é uma **sequência de Cauchy** quando para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon.$$

- (a) Mostre que toda sequência convergente é de Cauchy.
- (b) Mostre que se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência convergente então a sequência é convergente.
- (c) Mostre que toda sequência de Cauchy é limitada.
- (d) Conclua que uma sequência é convergente se, e somente se, a sequência é de Cauchy.

Valor da questão 5: 2,0 pontos

5. (a) Considere duas sequências de números reais não-negativos (a_n) e (b_n) tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ para algum $c > 0$.
Mostre que $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.
- (b) Use o resultado anterior para estudar a convergência das séries $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ e $\sum \frac{1}{2^n - 1}$.

Valor da questão 6: 2,0 pontos

6. (a) Considere o conjunto $Y = (1, 2) \cup \{0, 3, 4\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. Encontre $\text{int } Y$ e $\overline{Y}$.
Além disso diga se Y é aberto, fechado ou nem aberto nem fechado. Justifique.
- (b) Prove que se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto então o conjunto

$$S = \{x + y; x, y \in K\}$$

também é compacto.

- (c) Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ mostre que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Dê um exemplo em que $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.