Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Seleção Escrita - Prova 2 - Curso de Verão
Mestrado em Matemática - 2011/1

Orientações:

- Resolver as questões nas folhas indicadas.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- Evitar rasuras e resolver claramente.
- A duração da prova é de no máximo 3 horas.
- A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Valor da questão 1: 1,0 pontos

1. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ definida em $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ é suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = a$, a sequência $(f(x_n))$ seja convergente.

Valor da questão 2: 1,0 pontos

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que se anula nos racionais. Prove que f é identicamente nula.

Valor da questão 3: 1,5 pontos

3. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com derivada crescente (decrescente) no intervalo I de $\mathbb{R}$. Prove que qualquer reta tangente ao gráfico de f só toca esse gráfico no ponto de tangência.

Valor da questão 4: 1,5 pontos

4. Considere uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que se a imagem de f é um conjunto enumerável então f é constante.

Valor da questão 5: 2,0 pontos

5. Encontre um contra exemplo para cada uma das seguintes afirmações, justificando sua resposta. Aqui I é um intervalo de $\mathbb{R}$.

   (a) Se $f : I \to \mathbb{R}$ é tal que para algum $a \in \text{int}(I)$ tem-se $f'(a) = 0$, então a é um ponto de máximo ou mínimo local de f.

   (b) Se $f : I \to \mathbb{R}$ é tal que f tem um ponto de máximo ou de mínimo local em $a \in \text{int}(I)$, então f é derivável em a e $f'(a) = 0$.

   (c) Se $f : I \to \mathbb{R}$ é tal que f tem um ponto de máximo ou de mínimo local em $a \in I$ e f é derivável em a, então $f'(a) = 0$.

   (d) Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável e crescente então $f'(x) > 0$ para todo $x \in X$.

   (e) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável então existe $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g' = f$.

Valor da questão 6: 1,5 pontos

6. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, $f \geq 0$ e $f(c) > 0$ para algum $c \in [a, b]$ então $\int\limits_a^b f(x)\, dx > 0$.

Valor da questão 7: 1,5 pontos

7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável, com f' integrável. Prove que para quaisquer $x, c \in [a, b]$ tem-se

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\, dt.$$