Universidade Federal de Santa Maria - CCNE
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Prova de Seleção Escrita
Mestrado em Matemática - 2013/1

-

Nome:____

Orientações:

- Resolver as questões nas folhas indicadas.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- A duração da prova é de no máximo 5 horas.
- A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Notação: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os conjuntos dos números naturais, racionais, reais e complexos, respectivamente.

---

1. (***1,0 ponto***) Responda Verdadeiro (V) ou Falso (F) nos itens abaixo, justificando sua resposta:

   (a) *(0,25)* Sejam $T, S : V \to V$ operadores lineares. Se $TS = ST$, então $Ker(S)$ e $Im(S)$ são subespaços invariantes por T.

   (b) *(0,25)* Sejam V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita e
   $$V^* = \{f : V \to \mathbb{C} \ / \ f \text{ é uma transformação linear}\}$$
   o espaço vetorial dual de V. Então V é isomorfo a V^*.

   (c) *(0,25)* Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que é injetora.

   (d) *(0,25)* Seja $V = P^2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2. Então um subconjunto de V com 4 vetores pode ser linearmente independente.

2. (***1,0 ponto***) Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (5x - 6y, x)$.

   (a) *(0,4)* Calcule os autovalores e os autovetores de T;

   (b) *(0,3)* Exiba uma base para cada um dos autoespaços de T;

   (c) *(0,3)* Calcule explicitamente $T^8(x, y)$.

3. (***1,0 ponto***) Seja $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ o operador linear dado por $Tv = Av^t$, onde
   $$v = (z_1, z_2, z_3, z_4), \quad A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } v^t = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$
   Calcule a forma canônica de Jordan de T.

4. (***1,0 ponto***) Considere o espaço vetorial real $P^2(\mathbb{R})$ dos polinônios de grau menor ou igual a dois com produto interno
   $$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \qquad \forall p, q \in P^2(\mathbb{R}).$$
   Determine a melhor aproximação do polinômio $q(x) = 1 - x^2$ no subespaço $P^1(\mathbb{R})$, dos polinônios de grau menor ou igual a um.

5. (***1,0 ponto***) Sejam V um $\mathbb{C}-$espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $W \subset V$ um subespaço vetorial. Mostre que:

   (a) *(0,5)* $V = W \oplus W^{\perp}$;

   (b) *(0,5)* $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$.

---

6. (***0,8 ponto***)

   (a) *(0,2)* Dê a definição de conjunto aberto em $\mathbb{R}$ e de conjunto fechado em $\mathbb{R}$;

   (b) *(0,2)* Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto então $\mathbb{R} - A$ é fechado;

   (c) *(0,2)* O que é a fronteira ∂X de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$?

   (d) *(0,2)* Dê exemplo de um conjunto X em que ∂X é aberto em $\mathbb{R}$.

7. (***0,6 ponto***)

   (a) *(0,4)* Prove que toda sequência de números reais monótona e limitada é convergente.
   Sugestão: Analise o caso em que a sequência é não-decrescente. Os outros casos são similares.

   (b) *(0,2)* Considere a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

   $$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \;\; n > 1.$$

   Prove que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e calcule seu limite.

8. (***0,8 ponto***) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em $[a, b]$. Mostre que:

   (a) *(0,5)* Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ onde $f'(c) = 0$;

   (b) *(0,3)* Se $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$, então existe $c \in (a, b)$ onde $f'(c) = g'(c)$.

9. (***1,3 pontos***) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada integrável. Defina

   $$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

   (a) *(0,4)* Mostre que F é contínua em $[a, b]$.

   (b) *(0,6)* Prove que se f é contínua em $x_0 \in (a, b)$ então F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

   (c) *(0,3)* Seja $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Mostre que g é estritamente crescente.

10. (***1,5 pontos***)

   (a) *(1,0)* Prove que é uniformemente convergente, em $[0, +\infty)$, a série

   $$\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}.$$

   (b) *(0,5)* O que se pode afirmar sobre a função $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$?