Universidade Federal de Santa Maria - CCNE
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Prova de Seleção Escrita
Mestrado em Matemática - 2013/1

-
Nome:____

Orientações:
- Resolver as questões nas folhas indicadas.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- A duração da prova é de no máximo 5 horas.
- A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Notação: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os conjuntos dos números naturais, racionais, reais e complexos, respectivamente.

---

1. (***1,0 ponto***) Verdadeiro (V) ou Falso (F)? Justifique suas respostas.

   (a) *(0,25)* Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e W_1, W_2 subespaços vetoriais de V. Então $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial de V;

   (b) *(0,25)* Existe uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém os vetores $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, 1)$;

   (c) *(0,25)* Se $T : U \to V$ é uma transformação linear injetiva e U, V são $\mathbb{C}$-espaços vetoriais de dimensão finita, então $\dim_{\mathbb{C}} U \leq \dim_{\mathbb{C}} V$;

   (d) *(0,25)* Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita e V^* o $\mathbb{C}$-espaço vetorial dual, isto é, $V^* = \{f : V \to \mathbb{C}; f \text{ é funcional linear}\}$. Então V e V^* são espaços vetoriais isomorfos.

2. (***1,0 ponto***) Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, -2x - 3y + z, 2x + 2y - 2z).$$

   Mostre que T é diagonalizável.

3. (***1,0 ponto***) Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, dos polinômios de grau menor ou igual a 3, com o seguinte produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \quad f, g \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$$

   Seja W o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios $u(t) = 5$ e $v(t) = 1+t$. Calcule $W^{\perp}$ (o ortogonal de W).

4. (***1,0 ponto***) Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, dos polinômios de grau menor ou igual a 2, e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ determinada por $T(1, 0) = 1 - t$ e $T(0, 1) = 1 - t^2$.

   (a) *(0,5)* Encontre o núcleo e a imagem da transformação T;

   (b) *(0,5)* Esta transformação é injetiva, sobrejetiva, bijetiva? Justifique sua resposta.

5. (***1,0 ponto***) Sejam V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear tal que $T^2 = T \circ T = T$. Considere $W_1 = \{v \in V \,:\, T(v) = v\}$ e $W_2 = \mathrm{Ker}(T) = \{v \in V \,:\, T(v) = 0\}$. Mostre que $V = W_1 \oplus W_2$.

---

6. (***1,0 ponto***) A *sequência de Fibonacci* é definida indutivamente por

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ e } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Considere a sequência

$$x_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Prove que (x_n) é convergente, com limite

$$L = \frac{1}{L+1} = \frac{(-1+\sqrt{5})}{2}.$$

7. (***1,0 ponto***) Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é *côncava* se para quaisquer $x, y \in I$ e $t \in [0,1]$, temos

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ côncava e contínua, com $f(a) < f(b)$. Mostre que para cada $d \in (f(a), f(b))$, existe único $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

8. (***1,0 ponto***) Suponha que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in (a,b)$. Prove que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

9. (***1,0 ponto***) Prove que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,b]$.

10. (***1,0 ponto***)

    (a) *(0,8)* Prove que é uniformemente convergente, em $\mathbb{R}$, a série de funções

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2n^2}.$$

    (b) *(0,2)* O que se pode afirmar sobre a função $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+2n^2}$? Justifique sua resposta.