Universidade Federal de Santa Maria - CCNE
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Prova de Seleção Escrita
Mestrado em Matemática - 2013/2

-
Nome:____

Orientações:
- Resolver as questões nas folhas indicadas.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- A duração da prova é de no máximo 5 horas.
- A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Notação: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os conjuntos dos números naturais, racionais, reais e complexos, respectivamente.

---

1. (***1,0 ponto***) Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{C}^3$, onde $v_1 = (1, 0, -i), v_2 = (1+i, 1-i, 1)$ e $v_3 = (i, i, i)$. Mostre que β é uma $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}^3$. Encontre as coordenadas de um vetor $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ em relação a esta base.

2. (***1,0 ponto***) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a imagem de T é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1, 0, -1)$ e $(1, 2, 2)$. Em seguida, encontre o núcleo desta transformação.

3. (***1,0 ponto***) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$, W um subespaço vetorial de V e $f : W \to \mathbb{K}$ um funcional linear. Mostre que existe um funcional linear $g : V \to \mathbb{K}$ tal que $g(w) = f(w)$ para todo $w \in W$.

4. (***1,0 ponto***) Seja T um operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ o qual pode ser representado na forma matricial, em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$, por:

$$\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

   Prove que T é diagonalizável.

5. (***1,0 ponto***) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com um produto interno $\langle\, , \rangle$ e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de V. Seja T um operador linear sobre V e $A = (a_{ij})$ a matriz de T em relação à base β. Mostre que $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle$.

---

6. (a) (***0,5 ponto***) Mostre que toda sequência monótona limitada é convergente.

   (b) (***0,5 ponto***) Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ for convergente e $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ converge (dica: prove que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ partindo de $0 \leq (a-b)^2$).

   (c) (***0,5 ponto***) Para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge?

7. (***0,5 ponto***) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ é contínua então f é constante.

8. (***1,0 ponto***) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ então f é limitada.

9. (***1,0 ponto***) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dizemos que f é Lipschitz em I se existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \forall x, y \in I$. Suponha que f é derivável em I. Prove que f é Lipschitz em I se, e somente se, f' é limitada em I.

10. (***1,0 ponto***) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se $\int\limits_x^y f(s)ds = 0, \forall x, y \in [a, b]$ então $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.