

Prova de Seleção Escrita Mestrado em Matemática - 2015/1

-

Nome: _____

Orientações:

- Resolver as questões nas folhas indicadas.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- A duração da prova é de no máximo 5 horas.
- A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Notações:

- $\mathbb{R}$ denotará o conjunto dos números reais,
- $P_2 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ denotará $\mathbb{R}$ -espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a dois, com as operações usuais,
- $\ker T$ denotará o núcleo da transformação linear $T : E \rightarrow F$,
- p' denotará a derivada de p .

-
1. (**1,3**) Considerando os operadores lineares $L : P_2 \rightarrow P_2$, $D : P_2 \rightarrow P_2$ e $T : P_2 \rightarrow P_2$ dados respectivamente por

$$L(p(t)) = p(2t + 1), \quad D(p(t)) = p'(t) \text{ e } \quad T(p(t)) = (D \circ L)(p(t)), \forall p(t) \in P_2.$$

- (a) Mostre que $\ker T \subseteq \ker(T \circ T)$;
- (b) Encontre representações matriciais para L e D na base canônica. Use estas representações para obter representações matriciais para T e $T \circ T$;
- (c) Calcule (se houver) os autovalores e autovetores associados a T e $T \circ T$. Qual a relação entre os núcleos obtidos no item (a) e os autovetores de T e $T \circ T$?
2. (**0,6**) Sejam E um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de dimensão finita n , $T : E \rightarrow E$ um operador linear e λ um autovalor de T .
- (a) Mostre que $V_\lambda = \{x \in E ; T(x) = \lambda x\}$ é um $\mathbb{R}$ -subespaço vetorial de E , T -invariante. Esse é chamado de *autoespaço associado* a λ .
- (b) Se $T - \lambda I$ tem posto k , qual é a dimensão do autoespaço associado a λ ? Explique.
3. (**1,1**) Seja E um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. Sejam $x, y \in E$, $x \neq y$, a *reta* que une os pontos x e y é definida por:

$$r = \{(1-t)x + ty ; t \in \mathbb{R}\} = \{x + t(y-x) ; t \in \mathbb{R}\}.$$

Um subconjunto $V \subset E$ é uma *variedade afim* se a reta que une dois pontos quaisquer de V está contida em V .

- (a) Mostre que todo $\mathbb{R}$ -subespaço vetorial de E é uma variedade afim. A recíproca é verdadeira?
- (b) Sejam $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ e $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b\}$. Mostre que H é uma variedade afim.
- (c) Seja V uma variedade afim de E . Dado $x \in V$ considere $F_x = \{y - x ; y \in V\}$. Mostre que F_x é um $\mathbb{R}$ -subespaço vetorial de E .
4. (**2,0**) Disserte sobre o tema **Transformações lineares**. Nessa questão sugerimos que sejam abordados os seguintes tópicos:

- Definição e exemplos,
- Núcleo, imagem e isomorfismo de espaços vetoriais,
- Teorema do Núcleo e da Imagem.

5. **(1,0)**

- (a) Prove que toda sequência monótona e limitada é convergente.
- (b) Prove que a condição necessária e suficiente para que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente é que dado qualquer $\varepsilon > 0$ exista n_0 inteiro positivo tal que,

$$n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon,$$

para todo inteiro positivo p .

6. **(1,0)**

- (a) Mostre que a função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 2x, & \text{se } x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ |x|, & \text{se } x \in (-\frac{1}{2}, 0] \\ x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \in (0, 1], \end{cases}$$

é contínua.

- (b) A função dada no item anterior assume valor máximo no domínio de definição? Justifique.

7. **(1,0)** Seja $A \subset \mathbb{R}$. A fim de que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua é necessário e suficiente que $f^{-1}(B)$ seja aberto, qualquer que seja $B \subset \mathbb{R}$ aberto.

8. **(2,0)** Disserte sobre o tema **Funções deriváveis**, abordando definições, exemplos e principais resultados, como:

- Operações com funções deriváveis,
- Derivada da função inversa,
- Derivada de funções compostas,
- Teorema de Rolle, Teorema do Valor Médio e aplicações.