

Prova de Seleção Escrita Mestrado em Matemática - 2015/2

-

Nome: _____

Orientações:

- Resolver as questões nas folhas indicadas.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- A duração da prova é de no máximo 5 horas.
- A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Notações:

- $\mathbb{R}$ denotará o conjunto dos números reais,
- $\langle X \rangle$ denotará o subespaço gerado por X ,
- P_2 denotará o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2.

1. (**1,0**) Seja $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (0, -1, 1)$. Em cada item, avalie se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando **detalhadamente** sua resposta:

- Se $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ são as coordenadas do vetor $u \in W$ na base $\{v_1, v_2\}$, então $u = (1, -1, 3)$.
- O conjunto $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ constitui uma base para W .
- Existe um vetor v_3 do $\mathbb{R}^3$ tal que $v_3 \notin W$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.
- Existe ao menos uma transformação linear sobrejetora de W sobre o $\mathbb{R}^3$.
- Existe um operador linear sobre o $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo é W .

2. (**1,0**) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

- Encontre os autovalores de A_α e respectivas multiplicidades algébricas.
- Determine uma base (de autovetores) para cada autoespaço V_λ de A_α .
- Prove que A_α é diagonalizável para qualquer α , e encontre uma matriz mudança de base S_α e a matriz diagonal D_α tal que $A_\alpha = S_\alpha^{-1} D_\alpha S_\alpha$.

3. (**1,0**)

- Verifique que $\beta = \{1 + t, -1 + t, t^2\}$ é uma base de P_2 .
- Verifique que $T : P_2 \rightarrow P_2$ definido por $T(f(t)) = \frac{df(t)}{dt} - f(t)$ é um operador linear.
- Encontre a matriz que representa T com relação à base β .
- Utilize a matriz encontrada no item anterior para achar a solução de $T(f(t)) = 3 - 3t + 2t^2$ em $\langle \beta \rangle$.

4. (**2,0**) Disserte sobre o tema **Teorema do Núcleo e Imagem**. Nessa questão sugerimos que sejam abordados os seguintes tópicos:

- Transformações Lineares,
- Injetividade, sobrejetividade e isomorfismo,
- Teorema do Núcleo e Imagem.

5. **(1,0)** Classifique cada uma das sentenças abaixo como verdadeira (V) ou falsa (F), provando as verdadeiras e fornecendo um contra-exemplo para as falsas.

- (a) () Se (x_n) e (y_n) são sequências convergentes, com $x_n < y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n < \lim y_n$.
- (b) () Se $\lim x_n = a = \lim y_n$, onde $a \in \mathbb{R}$, e $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim z_n = a$.
- (c) () Se (x_n) é uma sequência convergente, então (x_n) é de Cauchy.
- (d) () Se a série $\sum b_n$ é convergente e $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então a série $\sum a_n$ também converge.
- (e) () Se $a_{n+1} \geq a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\sum a_n$ é convergente, então $\lim na_n = 0$.

6. **(1,0)**

- (a) Sejam $I \subset \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de I e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Prove que, se $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset I, \text{ com } \lim x_n = a, \text{ tem-se } \lim f(x_n) = L.$$

- (b) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = n$, onde $n \in \mathbb{Z}$ e $n \leq x < n + 1$. Prove que, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n \text{ e } \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1.$$

7. **(1,0)** Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Prove que p é uma bijeção com inversa contínua se, e somente se, $a^2 < 3b$.

8. **(2,0)** Disserte sobre o tema **Continuidade de funções reais de uma variável real**. Nessa questão sugerimos que sejam abordados os seguintes tópicos:

- Definição e exemplos,
- Propriedades das funções contínuas,
- Teorema do Valor Intermediário e Aplicações,
- Continuidade Uniforme,