Universidade Federal de Santa Maria - CCNE
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Prova de Seleção Escrita
Mestrado em Matemática - 2015/1

-

Nome:____

Orientações:
- Resolver as questões nas folhas indicadas.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- A duração da prova é de no máximo 5 horas.
- A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Notações:

- $\mathbb{R}$ denotará o conjunto dos números reais,
- $\overline{X}$ denotará o fecho de $X \subset \mathbb{R}$,
- $< X >$ denotará o subespaço gerado por X.

---

1. (***1,0***) Dados $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ e $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ vetores de $\mathbb{R}^4$. Dizemos que u *é ortogonal a* v, e escrevemos $u \perp v$, se e somente se $\sum_{i=1}^{4} u_i v_i = 0$. Dado $S \subset \mathbb{R}^4$ um subconjunto, seja $S^\perp := \{u \in \mathbb{R}^4 \,;\, u \perp s, \forall s \in S\}$.

   (a) Mostre que $S^\perp$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

   Sejam $u = (0, 1, -1, 3)$, $v = (1, 0, 2, 0)$, $w = (2, 1, 1, 1)$ e $t = (2, -3, 7, -9)$ vetores de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Exiba uma base de $U = < u, v, w, t >$. Qual é sua dimensão?

   (c) Calcule $U^\perp$.

   (d) Mostre que $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$.

2. (***1,0***) Seja V um espaço vetorial.

   (a) Mostre que se $\{v_1, ..., v_r\}$ gera V e $\{w_1, ..., w_s\} \subset V$ é linearmente independente então $s \leq r$.
   Considere $dim V = n$ e $S \subset V$. A partir do item (a) conclua que:

   (b) Se S tem mais de n vetores então S é linearmente dependente.

   (c) Se S é linearmente independente e tem n vetores então S é uma base de V.

   (d) Se S gera V e tem n vetores então S é uma base de V.

3. (***1,0***) Seja $\theta \in \mathbb{R}$ fixado. Denotamos por T_θ o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ que geometricamente representa uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo Z no sentido anti-horário.

   (a) Encontre a matriz que representa T_θ na base canônica do $\mathbb{R}^3$.

   (b) Para cada $R \in \mathbb{R}$, considere $C_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x = R\, cos\alpha \text{ e } y = R\, sen\alpha, z, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Mostre que $T_\theta(C_R) \subset C_R$.

   (c) Calcule os autovetores de T_θ, mesmo sendo estes complexos.

   (d) Mostre que o único $\theta \in (0, 2\pi)$ tal que todos os autovalores de T_θ são reais é $\theta = \pi$. Calcule os autoespaços associados aos autovalores de T_π e verifique que um deles é o cilindro C_0.

4. (***2,0***) Disserte sobre o tema **Teorema Cayley-Hamilton**. Nessa questão sugerimos que sejam abordados os seguintes tópicos:

- Autovalores e autovetores,
- Polinômio característico e polinômio minimal,
- Teorema Cayley-Hamilton.

5. (***0,5***) Seja $a > 0$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida indutivamente por

$$a_1 = a, \qquad\qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right).$$

Mostre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e calcule seu limite.

6. (***0,5***) Sejam $N_1 \subset \mathbb{N}$ e $N_2 \subset \mathbb{N}$ subconjuntos infinitos e disjuntos tais que $N_1 \cup N_2 = \mathbb{N}$. Seja (x_n) uma sequência cujas restrições a N_1 e a N_2 convergem para o mesmo limite L. Prove que (x_n) converge para L.

7. (***1,0***) Sobre funções contínuas:

   (a) Prove que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua se e somente se para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

   (b) Prove que se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua e $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, então f é uniformemente contínua.

8. (***1,0***) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivavel. Assuma que para todo $x \in \mathbb{R}$ tenha-se $0 \leq f'(x) \leq f(x)$. Conclua que:

   (a) a função $g(x) = e^{-x} f(x)$ é não crescente,

   (b) se f anula-se em algum ponto então f é identicamente nula.

9. (***2,0***) Disserte sobre o tema **Séries Numéricas**. Nessa questão sugerimos que sejam abordados os seguintes tópicos:

   - Definição e exemplos,
   - Critério da Comparação,
   - Testes de d' Alembert e de Cauchy,
   - Regra de Leibniz,
   - Séries absolutamente convergentes e condicionalmente convergentes.