

Prova de Seleção Escrita Mestrado em Matemática - 2016

Nome: _____

Orientações:

- Resolver as questões nas folhas indicadas.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- A duração da prova é de no máximo 5 horas.
- A prova deve ser resolvida individualmente e sem consulta.

Notações:

- $\mathbb{R}$ denota o corpo dos números reais;
- $M_n(\mathbb{R})$ denota o espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$ munido com as operações usuais;
- $E_{rs} = (e_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ onde $e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = r \text{ e } j = s, \\ 0 & \text{se } i \neq r \text{ ou } j \neq s. \end{cases}$

1. (**1,0**) Sejam $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0; 3x_1 + x_3 = 0\}$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; x_3 + x_4 = 0\}$ subespaços do espaço vetorial real euclidiano $\mathbb{R}^4$.

- (a) Calcule a dimensão do subespaço vetorial $U \cap V$;
- (b) Calcule a dimensão do subespaço vetorial $U + V$;
- (c) Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ cujo núcleo de T seja $U \cap V$ e cuja imagem seja $U + V$.

2. (**1,0**) Seja $U = \{A \in M_3(\mathbb{R}); \text{tr}(A) = 0\}$ onde $\text{tr}(A)$ é a soma dos elementos da diagonal principal de A , chamado de traço de A .

- (a) Mostre que U é um subespaço vetorial de $M_3(\mathbb{R})$;
- (b) Mostre que o conjunto $\{E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{23}, E_{31}, E_{32}\} \subseteq U$ é linearmente independente e complete-o com vetores de $M_3(\mathbb{R})$, para obter uma base α de U ;

- (c) Calcule as coordenadas do vetor $v = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in U$ na base α obtida no item (b);

- (d) Supondo que a matriz mudança da base α encontrada no item (b) para uma outra base β vale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

quais são as coordenadas do vetor v dado no item (c) nesta base β ?

3. (**1,0**) Sejam V e W K -espaços vetoriais de dimensão finita isomorfos, isto é, existe $S : V \rightarrow W$ isomorfismo de espaços vetoriais.

- (a) Mostre que $\dim V = \dim W$;
- (b) Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Mostre que $S \circ T \circ S^{-1} : W \rightarrow W$ é um operador linear;

- (c) Considere $\varphi : \mathcal{L}(V, V) \rightarrow \mathcal{L}(W, W)$ a aplicação dada por $\varphi(T) = S \circ T \circ S^{-1}$. Mostre que φ é um isomorfismo de espaços vetoriais.
4. **(2,0)** Disserte sobre o tema **técnicas para diagonalização de operadores**. Nessa questão sugerimos que sejam abordados os seguintes tópicos:
- Definição de autovalores e autovetores de um operador linear;
 - Descrição dos métodos para obtenção dos mesmos, justificando a validade destes métodos, incluindo a independência da escolha da base nestes cálculos;
 - Definição de operadores diagonalizáveis;
 - Descrição de condições para que um operador seja diagonalizável.
5. **(1,25)** Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números reais e tais que $x_n \leq y_n$ para n suficientemente grande. Mostre que:
- se (x_n) for monótona e limitada inferiormente e se (y_n) for convergente, então (x_n) será convergente;
 - se ambas as sequências forem convergentes, então $\lim x_n \leq \lim y_n$. Dê um exemplo de duas sequências convergentes tais que $x_n < y_n$ para n suficientemente grande, mas $\lim x_n = \lim y_n$;
 - se $0 \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a convergência de Σy_n implica a convergência de Σx_n enquanto a divergência de Σx_n implica a divergência de Σy_n ;
 - se $0 \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e Σx_n^2 e Σy_n^2 convergirem, então $\Sigma (x_n y_n)$ converge.
6. **(1,25)** Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.
- Suponha $I = [0, 1]$, f contínua em I e tal que $f(0) = f(1)$. Mostre que existe pelo menos um ponto $c \in [0, 1/2]$ tal que $f(c) = f(c + 1/2)$;
 - Suponha I aberto e f derivável em I . Mostre que se a função derivada f' for limitada, então f é uma função lipschitziana, em particular, f é uniformemente contínua;
 - Suponha I aberto e f derivável em I e tal que $f'(x) \neq 0$ em cada $x \in I$. Mostre que f é uma função injetora;
 - Suponha I aberto e $f \in C^n(I)$, n par, tal que $f^{(j)}(\xi) = 0$ para $1 \leq j \leq n-1$, $f^{(n)}(\xi) \neq 0$, $\xi \in I$. Mostre que ξ é ponto de mínimo local de f se e somente se $f^{(n)}(\xi) > 0$.
7. **(0,5)** Dado $X \subset \mathbb{R}$ mostre que:
- $b \in \mathbb{R}$ é um ponto interior de X se e somente se toda sequência de números reais convergente a b é uma sequência de X (a partir de um certo termo). Mostre que b é um ponto isolado de X se e somente se toda sequência de X convergente a b é constante (a partir de um certo termo);
 - o fecho de X é a união de X com sua fronteira e conclua que X é fechado se e somente se contém a sua fronteira;
8. **(2,0)** Disserte sobre o tema **limites de funções reais de uma variável real**. Nessa questão sugerimos que sejam abordados os seguintes tópicos:
- Definição;
 - Propriedades;
 - Limites laterais;
 - Limites no infinito;
 - Limites infinitos.