Universidade Federal de Santa Maria - CCNE
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Prova Escrita de Seleção
Mestrado em Matemática - 2017.2

Nome:____

Orientações:

- Esta prova tem 4 páginas, 2 frente e 2 verso, com 14 questões no total.
- Resolver as questões nas folhas indicadas, utilizando-se o verso se necessário.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- Todas as folhas que contiverem algum tipo de resposta deverão ter nome e rubrica do candidato.

Álgebra Linear

Notações

- $\mathbb{R}$ denota o corpo dos números reais e em todas as questões os espaços vetoriais são reais, isto é, os escalares são tomados em $\mathbb{R}$;
- $Im(T)$ é a imagem e $Nuc(T)$ é o núcleo de uma transformação linear T;
- $dimV$ denota a dimensão de um espaço vetorial V.
- Para cada n natural, P_n denota o espaço vetorial dos polinômios de grau menores ou iguais a n.
- Para cada n natural, $T^n = T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T$ denota a composição da função T por ela mesma, n vezes.

Questões

1. (1,0) Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita.
   (a) Mostre que $\mathcal{L}(V,W) = \{T : V \to W;\, T \text{ é uma transformação linear}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(V,W) = \{f : V \to W;\, f \text{ é uma função }\}$ com as operações usuais.
   (b) Se $dimV = 2$ e $dimW = 3$ exiba uma base de $\mathcal{L}(V,W)$ e dê sua dimensão.
   (c) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fixada. Mostre que o subconjunto $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,;\, f(g(x)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. (1,0) Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x,y,z) = (x-y, x+2y+z, 6x+3y+3z)$.
   (a) Calcule $\dim Nuc(T)$;
   (b) Calcule $\dim \mathrm{Im}(T)$;
   (c) Verifique se a soma $Nuc(T) + \mathrm{Im}(T)$ é direta.

3. (1,0) Encontre uma transformação linear $T : P_3 \to P_3$ cujo núcleo seja gerado pelo vetores $1+t^3$ e $1-t^2$ e cuja imagem seja gerada pelos vetores t^2 e 1, que tenha ao menos um autovalor $\lambda = 5$.

4. (1,0) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ nilpotente de ordem 4, isto é, $T^4 = 0$ e $T^3 \neq 0$.

   (a) Mostre que se v é um vetor tal que $T^3 v \neq 0$ então $\beta = \{v, Tv, T^2 v, T^3 v\}$ é uma base do $\mathbb{R}^4$.

   (b) Encontre a representação matricial de T na base $\beta = \{v, Tv, T^2 v, T^3 v\}$.

   (c) Encontre os autovalores de T e seus correspondentes autovetores expressos em combinação linear dos vetores de β.

   (d) Decida se T é diagonálizavel ou não.

5. (1,0) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear.

   (a) Mostre que o polinômio característico independe da particular escolha da base.

   (b) Mostre que o determinante de T é igual ao produto das raízes do polinômio característico incluindo as multiplicidades.

   (c) Mostre que o traço de T é igual a soma das raízes do polinômio característico incluindo as multiplicidades.

Análise Matemática

Notações

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$; além disso, $\mathbb{Z}$ denota o conjuntos dos inteiros, $\mathbb{Q}$ o dos racionais e $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais.
- $(b_n) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ denotam sequências numéricas em geral;
- $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ denotam respectivamente, o supremo, o ínfimo e o elemento máximo de um conjunto A;
- f'e f'' denotam as derivadas de primeira e segunda ordem, enquanto que f^{-1} denota a inversa de uma função f .

Questões

6. (0,4) Dado $x \in \mathbb{R}$, considere $x^+ = \max\{x, 0\}$ e $x^- = \max\{-x, 0\}$. Seja (a_n) uma sequência de números reais onde $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mas não converge absolutamente. Mostre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergem para $+\infty$.

7. Responda, justificando sua resposta.

   (a) (0,3) Se (x_n) é uma sequência monótona crescente de números reais tal que $x_{n+1} - x_n < 1/n$ então (x_n) converge?

   (b) (0,3) Se $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

   $$g(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } -1 \leq x < 0 \\ 1 \text{ se } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

   então existe $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável tal que $f' = g$?

8. Mostre que:

   (a) (0,2) se $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, é limitado inferiormente, então

   $$\inf S = \sup\{x \in \mathbb{R}; x \text{ é uma cota inferior para } S\}.$$

   (b) (0,2) se $S \subset \mathbb{Z}$, $S \neq \emptyset$, é limitado inferiormente, então $\inf S \in S$.

   (c) (0,3) se (x_n) é uma sequência de números reais com $L = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, então dado $c < L$, o conjunto $\{n \in \mathbb{N}^*; x_n \leq c\}$ é finito.

9. Seja $A = \{x \in \mathbb{R}; x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$. Encontre, justificando sua resposta:

   (a) (0,2) o conjunto dos pontos de acumulação de A;

   (b) (0,2) a fronteira de A;

   (c) (0,2) o conjunto dos pontos interiores a A.

10. Um número $x \in \mathbb{R}$ é dito algébrico se existem $k \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, ..., a_k$ em $\mathbb{Z}$ com $\sum_{i=0}^{k} a_i x^i = 0$.

   (a) (0,3) Prove que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

   (b) (0,2) Justifique que o conjunto dos números transcendentes, ou seja, os números reais que não são algébricos, não é enumerável.

11. (0,5) Suponha que $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada, derivável e que não exista $\lim_{x \to b^-} f(x)$. Prove que $\sup_{x \in (a,b)} |f'(x)| = +\infty$.

12. Seja $f : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ com $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0,+\infty)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   (a) (0,2) Mostre que existe $f^{-1} : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$.

   (b) (0,3) Mostre que f^{-1} é derivável em $(0,+\infty)$ e obtenha $(f^{-1})'$ em função de f' e f^{-1}.

   (c) (0,3) Dado $n \in \mathbb{N}^*$, calcule a derivada de $g(x) = \sqrt[n]{x}$ para $x > 0$. Mostre que não existe $\lim_{x \to 0^+} g'(x)$.

13. (0,4) Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Mostre que se $c \in I$ é tal que $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$ então c é um ponto de máximo ou mínimo local.

14. (0,5) Questão dissertativa: Disserte sobre continuidade uniforme.