Universidade Federal de Santa Maria - CCNE
Pós-Graduação em Matemática - Mestrado em Matemática

Prova Escrita de Seleção II - 08/02/2018
Mestrado em Matemática - Seleção 2018.1

Nome:____

Orientações:
- Esta prova tem frente e verso, com 10 (dez) questões no total.
- Resolver as questões nas folhas indicadas, utilizando-se o verso se necessário.
- Pode-se utilizar lápis na resolução das questões.
- A duração da prova é de no máximo 5 horas.
- As questões em que o candidato não deixou em branco deverão ser assinaladas acima e conferidas pelos fiscais da prova.

Álgebra Linear

Notações:

- $\mathbb{R}$ denota o corpo dos números reais;
- Neste exame, todos os espaços vetoriais são reais, isto é, os escalares são tomados em $\mathbb{R}$;
- Para cada n natural, $P^n(\mathbb{R})$ denota o espaço vetorial dos polinômios de grau menor do que, ou igual a n;
- Para cada n natural, $T^n = T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T$ denota a composição da função T com ela mesma, n vezes;
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ denota o espaço vetorial das matrizes de ordem n, com entradas em $\mathbb{R}$;
- Para cada $k \in \mathbb{N}$, $A^k = A \cdot A \cdot \cdots \cdot A$ denota o produto da matriz A por ela mesma, k vezes.

Questão 1. Mostra-se que o conjunto $V = \mathbb{R}^2$, munido com as operações $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, definidas, respectivamente por

$$(x, y) + (z, w) = (x + z + 1, y + w), \text{ e } \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x + \lambda - 1, \lambda y), \ \forall\ (x, y), (z, w) \in V, \ \forall\ \lambda \in \mathbb{R},$$

é um espaço vetorial.

(a) (0,2) Qual é o elemento neutro da operação de adição definida acima? Justifique.

(b) (0,2) Dado $(x, y) \in V$, determine o oposto de (x, y).

(c) (0,3) Exiba uma base e dê a dimensão de V.

(d) (0,4) O conjunto $W = \{(x - 1, x) \in V; x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V? Em caso afirmativo, exiba uma base para W e dê sua dimensão.

Questão 2. Classifique cada uma das afirmações abaixo como Verdadeira ou Falsa. Dê um contra exemplo para as afirmações falsas e prove as verdadeiras.

(a) (........) (0,2) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ é uma transformação linear, então T não pode ser injetiva;

(b) (........) (0,2) A reunião de dois conjuntos linearmente independentes é sempre um conjunto linearmente independente;

(c) (........) (0,2) Se $\lambda = 0$ for um autovalor de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, então A não é diagonalizável;

(d) (........) (0,2) Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é nilpotente, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$, então 0 é o único autovalor para A.

Questão 3. (0,5) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear não nulo. Se $T^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{Z}, n > 2$, prove que $T^2 = 0$.

Questão 4. Seja $T : P^2(\mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R})$, definida por

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)(x + x^2),\ \forall\, p(x) \in P^2(\mathbb{R}).$$

(a) (0,2) Prove que T é uma transformação linear;

(b) (0,3) Determine o Núcleo e a Imagem de T. A seguir, para cada um deles, exiba uma base e dê sua dimensão.

(c) (0,2) T é um isomorfismo? Justifique.

(d) (0,4) Determine os autovalores de T.

Questão 5. (1,5) Disserte sobre o tema Diagonalização de Operadores. Nesta questão, sugerimos que sejam abordados os seguintes tópicos:
Definição, exemplos, justificativa para os operadores simétricos serem diagonalizáveis.

Análise Real

Notações:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ representa o conjunto dos números naturais;
- $\lim a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ representa o limite de uma sequência (a_n);

Questão 6. (0,5) Prove que a sequência $(a_n) \subset \mathbb{R}$, definida por $a_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é convergente. A seguir, determine $\lim a_n$, justificando.

Questão 7. (1,0) Seja $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(x)^2 = 1$, para todo $x \in (0, 1)$. Prove, utilizando o Teorema do Valor Intermediário, que ou $f(x) = 1$, para todo $x \in (0, 1)$ ou $f(x) = -1$, para todo $x \in (0, 1)$.

Questão 8.(1,0) Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivável, de modo que não exista $x \in [0, 1]$, com $f(x) = f'(x) = 0$. Prove que o conjunto $Z = \{x \in [0, 1]; f(x) = 0\}$ é finito.
Dica: Suponha que Z seja infinito.

Questão 9. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Prove que
(a)(0,25) para cada $n \in \mathbb{N}$, p_n possui uma única raiz real positiva a_n, com $a_n \leq 1$;

(b) (0,25) (a_n) é decrescente;
(c) (0,25) $a_n^{n+1} - 2a_n + 1 = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
Dica: $(x-1)\cdot(x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1) = x^{n+1} - 2x + 1$.
(d) (0,25)(a_n) converge e que $\lim a_n = \frac{1}{2}$.

Questão 10. (1,5) Disserte sobre o tema Topologia na Reta. Nesta questão, sugerimos que sejam abordados os seguintes tópicos:
Definições e exemplos, Conjuntos abertos e conjuntos fechados, Conjuntos conexos. Pontos de acumulação e Conjuntos compactos.