

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**Uma Introdução a
TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL**

Material didático elaborado para a disciplina de
Relatividade Especial do curso de Física
Licenciatura a Distância – UFSM/UAB

Rogemar André Riffel

Santa Maria, Julho de 2010

Sumário

Unidade A: As Origens da Teoria da Relatividade Especial.....	4
1 - Introdução	4
2 – Newton	5
3 – A Relatividade de Galileu	7
4 – O Éter Luminífero e a Teoria Eletromagnética.....	10
5 – O Experimento de Michelson-Morley	12
6 – Os dois Postulados de Einstein	17
RESUMO DA UNIDADE	19
EXERCÍCIOS	20
Unidade B: Transformações de Lorentz.....	22
1 – Transformações de Posição e Tempo	22
2 – Dilatação Temporal.....	25
3 – Contração de Lorentz	27
4 – Simultaneidade	30
5 – Transformações de Velocidade	32
6 – Transformações de Aceleração	35
7 – O Efeito Doppler da Luz	36
RESUMO DA UNIDADE.....	40
EXERCÍCIOS	41
Unidade C: Momento e Energia	43
1 – Momento Relativístico	43
2 – Massa	47
3 – A Velocidade Limite	47
4 – Força e Aceleração.....	49

5 – Energia total de uma Partícula Livre.....	51
6 – Relação Massa-Energia	53
7 – Relação Energia-Momento	54
8 - O Efeito Compton	55
RESUMO DA UNIDADE.....	58
EXERCÍCIOS	59
Unidade D: Processos de Alta Energia	60
1 – Transformações de Energia e Momento.....	60
2 – Colisões de Alta Energia	62
3 – Limiar de Energia.....	65
4 – Formação e Destruição de Partículas: Alguns Exemplos.....	68
RESUMO DA UNIDADE.....	72
EXERCÍCIOS	73
Referências	74

Unidade A: As Origens da Teoria da Relatividade Especial

1 - Introdução

O físico, matemático e astrônomo italiano [Galileu Galilei](#) (1564 – 1642) introduziu o princípio da relatividade no estudo da cinemática ao notar que para descrever o movimento de uma partícula é necessário definir um sistema de referência (ou referencial) e que este movimento apresenta características distintas em diferentes referenciais. Posteriormente, o físico e matemático inglês [Isaac Newton](#) (1643 – 1727) usou as idéias de Galileu para formular as leis que regem os movimentos na mecânica clássica – as Leis de Newton. Tanto para Newton, quanto para Galileu, o espaço (três dimensões) e o tempo são conceitos independentes.

A *Teoria da Relatividade* foi formulada no início do Sec. XX pelo físico alemão, radicado nos Estados Unidos, [Albert Einstein](#) (1879 – 1955). Nesta teoria, os conceitos independentes de espaço e tempo, usados por Newton, são substituídos por um único conceito chamado espaço-tempo que possui quatro dimensões: três dimensões espaciais (comprimento, largura e altura) e o tempo. A teoria da relatividade especial, publicada em 1905, se aplica a movimentos relativos que ocorrem na ausência de campos gravitacionais, ou seja, descreve o princípio da relatividade do movimento de referenciais em movimento uniforme. Já a teoria de relatividade geral, publicada por Einstein em 1915, é uma generalização da teoria da gravitação de Newton e leva em consideração o princípio da relatividade do movimento de referenciais em movimento acelerado, incluindo a teoria da relatividade especial como um caso particular em que a aceleração é nula. A formulação matemática da teoria da relatividade geral possui um grau de complexidade que foge ao objetivo do presente texto e por esse motivo não será discutida.

Neste texto apresentamos uma breve discussão sobre a teoria da relatividade especial. Nesta unidade apresentamos uma explanação sobre as origens desta teoria, na unidade B é apresentada a formulação das transformações de Lorentz. Considerações sobre momento relativístico e energia relativística são apresentadas na unidade C e a unidade D discute aplicações da teoria da relatividade especial em processos de alta energia.

2 – Newton

Todos os fenômenos naturais ocorrem em algum lugar do espaço e se modificam com o passar do tempo e um evento físico pode ser definido como um elemento de algum fenômeno que ocorre em uma determinada posição no espaço em um determinado instante de tempo. Dessa forma, um fenômeno físico pode ser descrito como uma seqüência destes eventos. A medida das posições no espaço onde ocorrem os eventos pode ser caracterizada pela escolha de um sistema de referência (ou referencial), que pode ser definido como um sistema de eixos, nos quais as posições em que o evento ocorre serão indicadas. Um exemplo de um referencial é apresentado na Figura A.1, onde um ponto (P) no espaço é definido pelas suas coordenadas x , y e z , as quais são construídas pela projeção do ponto nos eixos X , Y e Z . Um fenômeno físico, como por um exemplo a trajetória de uma partícula, pode ser caracterizado por sucessivas medidas da posição do espaço em que os eventos ocorrem em diferentes instantes de tempo.

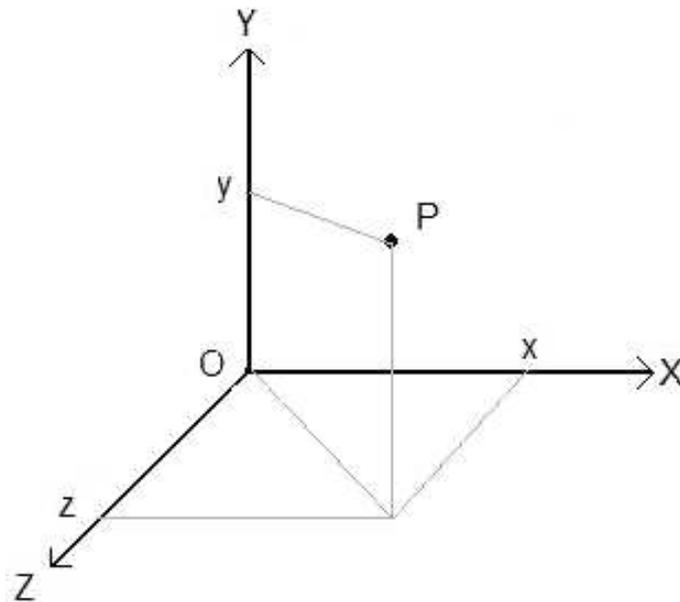


Figura 2.1: Representação de um sistema de referência com os eixos X, Y e Z. O ponto P representado possui coordenadas (x,y,z) e o a letra O representa a origem do sistema de referência, com coordenadas $(0,0,0)$.

Podemos facilmente notar que o movimento de uma dada partícula é diferente quando diferentes referenciais são usados para realizar as medidas, ou seja, sua

trajetória, velocidade e aceleração em cada posição não são as mesmas para diferentes referenciais.

Vamos agora considerar o movimento de uma partícula livre, ou seja, uma partícula sobre a qual não atua qualquer força ou cuja força resultante seja nula. A primeira lei de Newton nos diz que é possível encontrar um referencial (ou um conjunto de referenciais) no qual uma partícula livre sempre permanece em repouso ou em movimento retilíneo com velocidade constante. Estes referenciais são chamados de **referenciais inerciais**. Escrevendo de outra forma, um referencial inercial é aquele em que as três leis de Newton são válidas. Uma vez encontrado um referencial inercial é possível encontrar um conjunto infinito de referenciais inerciais, qualquer referencial que se movimenta com velocidade constante em relação a um referencial inercial também é um referencial inercial. Por outro lado, qualquer referencial que se desloque com velocidade variável em relação a um referencial inercial não pode ser um referencial inercial.

A mecânica Newtoniana faz uso dos conceitos clássicos de espaço e tempo absolutos, os quais são de fácil compreensão e correspondem a nossa experiência cotidiana, diferentemente das definições empregadas na teoria da relatividade como veremos mais adiante. De acordo com Newton, o **espaço absoluto** sempre permanecia similar e imóvel por sua própria natureza e sem relação com qualquer corpo externo. Para Newton, o espaço era uma enorme caixa, contendo materiais e objetos, onde os fenômenos físicos aconteciam. Este espaço era tridimensional, contínuo, imóvel (não variava com tempo), infinito, uniforme e possuía as mesmas propriedades em todas as direções. Newton também defendia a idéia de um **tempo absoluto**, o qual era unidimensional, contínuo, infinito e possuía as mesmas propriedades em todos os locais do universo. Este tempo fluía igualmente para qualquer evento físico sem nenhuma interferência externa.

A concepção moderna sobre espaço e tempo é de que estes não são absolutos e, como consequência não existe um movimento absoluto. A teoria da relatividade especial mostra que o tempo de um determinado evento é diferente em diferentes referenciais inerciais. Esta teoria descreve como as grandezas físicas e as formulações

matemáticas usadas para descrever as leis físicas se transformam de um referencial inercial para outro.

3 – A Relatividade de Galileu

Nesta seção vamos discutir como as grandezas físicas e expressões matemáticas que descrevem certo fenômeno físico se transformam de um referencial inercial para outro referencial inercial em movimento retilíneo uniforme usando os fundamentos da mecânica clássica. Para analisar como as posições e velocidades de uma determinada partícula se modificam de um referencial inercial para outro que se move em linha reta com velocidade constante em relação ao primeiro, vamos considerar dois referenciais R e R' como mostrado na Figura A.2. Nesta figura mostramos um caso particular em que os eixos X, Y e Z do referencial R são paralelos aos eixos X', Y' e Z' do referencial R', respectivamente. R' se move com velocidade \vec{v} em relação a R. O ponto P, que representa o local onde a partícula se encontra, possui coordenadas x, y e z no referencial R e $x', y',$ e z' , no referencial R'. Para caracterizar o evento físico, além da posição espacial, precisamos conhecer também o instante de tempo em que ele ocorreu medido no referencial R (t) e no referencial R' (t'). Vamos agora encontrar qual é a relação entre as coordenadas em R e as coordenadas em R' (x', y', z', t'). De acordo com a mecânica clássica, estas coordenadas estão relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = x - v_x t \\ y' = y - v_y t \\ z' = z - v_z t \\ t' = t, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde v_x, v_y e v_z são as componentes da velocidade \vec{v} de R' medida em relação a R. Usando a notação vetorial para representar as posições e a velocidade de R' em relação a R, a equação acima fica:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Estas equações são as **transformações de Galileu para as posições**. Conhecendo as posições em um referencial inercial podemos calcular as posições correspondentes em qualquer outro referencial inercial. Neste ponto vale à pena ressaltar que o instante

de tempo em que o evento ocorre é o mesmo em R e em R' e, como estes referenciais são genéricos (dois referenciais quaisquer), podemos dizer que o fluxo do tempo é o mesmo em todos os referenciais inerciais. As transformações de Galileu também não incorporam qualquer relação entre fluxo de tempo com as relações espaciais entre partículas ou com as propriedades espaciais dos objetos. Dessa forma, as transformações de Galileu incorporam a idéia de espaço e tempo absolutos, discutidos na seção anterior.

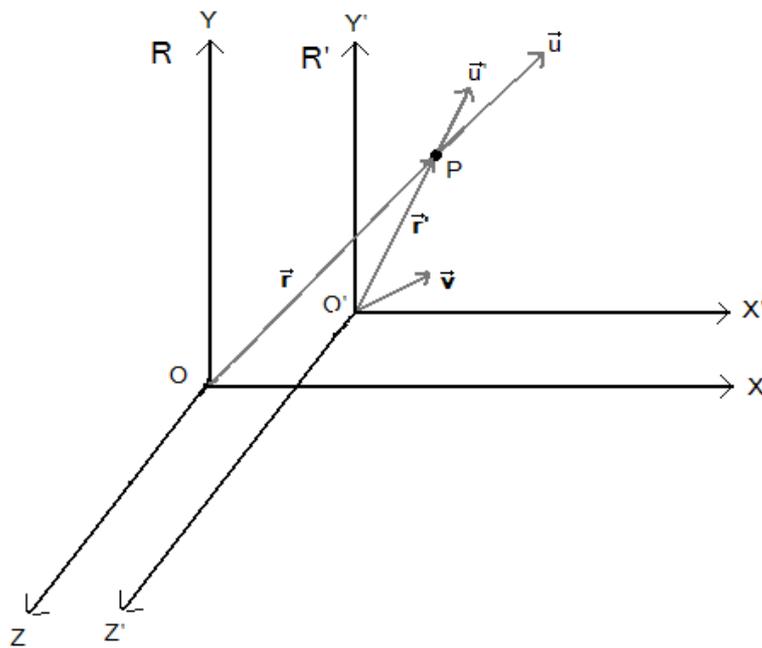


Figura A.2: Dois referenciais R e R' com origens O e O', respectivamente. R e R' possuem eixos paralelos e R' se movendo em relação a R com uma velocidade \vec{v} .

A velocidade da partícula no referencial R (\vec{u}) é dada por $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, enquanto que a velocidade da partícula em R' (\vec{u}') é expressa por $\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$. Dessa forma podemos obter a relação entre \vec{u} e \vec{u}' , simplesmente fazendo a derivada temporal da primeira equação em (A.2), obtendo-se:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}. \quad (\text{A.3})$$

Esta equação é conhecida como a **transformação de Galileu para a velocidade**. Conhecendo a velocidade de uma partícula em um referencial inercial podemos calcular a velocidade correspondente em qualquer outro referencial inercial.

Finalmente, podemos verificar qual é a relação entre a aceleração da partícula em R e em R', fazendo a derivada temporal da equação (A.3), que resulta em:

$$\vec{a}' = \vec{a}, \quad (\text{A.4})$$

sendo $\vec{a}' = \frac{d\vec{u}'}{dt}$ e $\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$ e lembrando que \vec{v} é constante e portanto sua derivada em relação ao tempo é nula. Das equações (A.2), (A.3) e (A.4) observamos que as posições e velocidades da partícula nos referenciais inerciais R e R' são diferentes, porém o valor de sua aceleração é o mesmo nos dois referenciais. Multiplicando a equação (A.4) pela massa (m) da partícula obtemos

$$m\vec{a}' = m\vec{a}. \quad (\text{A.5})$$

Esta equação nos diz que a expressão matemática da segunda lei de Newton tem a mesma forma nos dois referenciais, ou seja, se esta lei é válida em um referencial inercial ela também é válida em qualquer outro referencial inercial. Esta conclusão implica que as expressões matemáticas de outras leis da mecânica clássica, que se originam das leis de Newton, também possuem as mesmas formas em diferentes referenciais inerciais. Podemos reescrever a discussão acima como o **princípio da relatividade de Galileu**, que pode ser enunciado da seguinte forma: as expressões matemáticas que representam as leis da mecânica clássica têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

EXEMPLO: Uma ambulância se desloca por uma estrada retilínea e ultrapassa um carro que se movimenta no mesmo sentido com velocidade de 80 km/h. Um dos passageiros do carro usa o fenômeno do efeito Doppler para medir a velocidade da ambulância em relação ao carro e verifica que esta se afasta com velocidade de 20 km/h.

- Qual é a velocidade da ambulância em relação ao referencial fixo na estrada?
- Após 6 minutos da ultrapassagem, qual é a distância percorrida pela ambulância em relação ao carro?

Solução: Primeiramente, vamos considerar dois referenciais R e R', sendo que o referencial R está em repouso em relação a estrada e o referencial R' está fixo no carro e se movimenta com velocidade constante de 80 km/h em relação a R. Consideramos estes referenciais como sendo referenciais inerciais!

a) Podemos encontrar a velocidade da ambulância em relação a R utilizando a transformação de velocidade de Galileu, dada pela equação (A.3). Como o sentido de deslocamento do carro e da ambulância são os mesmos, podemos considerar somente os módulos das velocidades no cálculo, então

$$u' = u - v,$$

onde $u' = 20$ km/h é a velocidade da ambulância medida no referencial R', $v = 80$ km/h é a velocidade de R' em relação a R e u é a velocidade da ambulância em relação a R, que queremos encontrar, então:

$$u = u' + v = 20 \text{ km/h} + 80 \text{ km/h} = 100 \text{ km/h}.$$

A velocidade da ambulância em relação a um ponto fixo na estrada é de 100 km/h.

b) Vamos supor que os referenciais R e R' possuem origens coincidentes em $x'_0 = x_0 = 0$, ou seja, a origem dos referenciais é fixada exatamente no ponto em que ocorre a ultrapassagem. Após 6 minutos, a posição da ambulância em relação a R será:

$$x = x_0 + ut = 0 + 100 \text{ km/h} \frac{6 \text{ min}}{60 \text{ min/h}} = 10 \text{ km}.$$

Em relação a R', a posição da ambulância é dada pelas transformações de Galileu para as posições (equações A.22). Como os movimentos do carro e da ambulância se dão no mesmo sentido, podemos considerar somente a componente x, então.

$$x' = x - vt = 10 \text{ km} - 80 \text{ km/h} \frac{6 \text{ min}}{60 \text{ min/h}} = 2 \text{ km}.$$

A distância da ambulância em relação ao carro é 2 km.

4 – O Éter Luminífero e a Teoria Eletromagnética

Em 1862 o físico e matemático britânico James Clerk Maxwell (1831-1879) formulou um conjunto de equações que fundamentam a teoria eletromagnética clássica – as equações de Maxwell. Estas equações possuem uma solução ondulatória na ausência de cargas e correntes elétricas, ou seja, elas prevêm a existência de ondas eletromagnéticas. De acordo com a teoria eletromagnética clássica, estas ondas se propagam com uma velocidade igual à velocidade da luz $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8$ m/s, o

qual estava em boa concordância com os valores experimentais obtidos para a velocidade da luz. Esta concordância, aliada a propriedades de polarização da luz, levaram a consideração de que a luz era uma onda eletromagnética. Geralmente, as ondas eletromagnéticas são classificadas de acordo com a sua frequência, como por exemplo, ondas de rádio, radiação infravermelha, radiação visível, radiação ultravioleta, raios X, entre outras.

Na época, acreditava-se que todas as ondas necessitavam de algum meio para se propagar, como por exemplo, uma onda em uma corda, ou a onda sonora que se propaga no ar, o que levou os cientistas a propor a existência de um meio (distribuído em todo o espaço) no qual as ondas eletromagnéticas se propagavam. Este meio foi chamado de **éter luminífero**, ou simplesmente éter. O éter era um meio hipotético, elástico, com características tais que não ofereceria nenhuma resistência ao movimento dos planetas – os quais eram muito bem descritos pelas leis de Newton – e interagiria somente com ondas eletromagnéticas, proporcionando meios para estas se locomoverem no espaço.

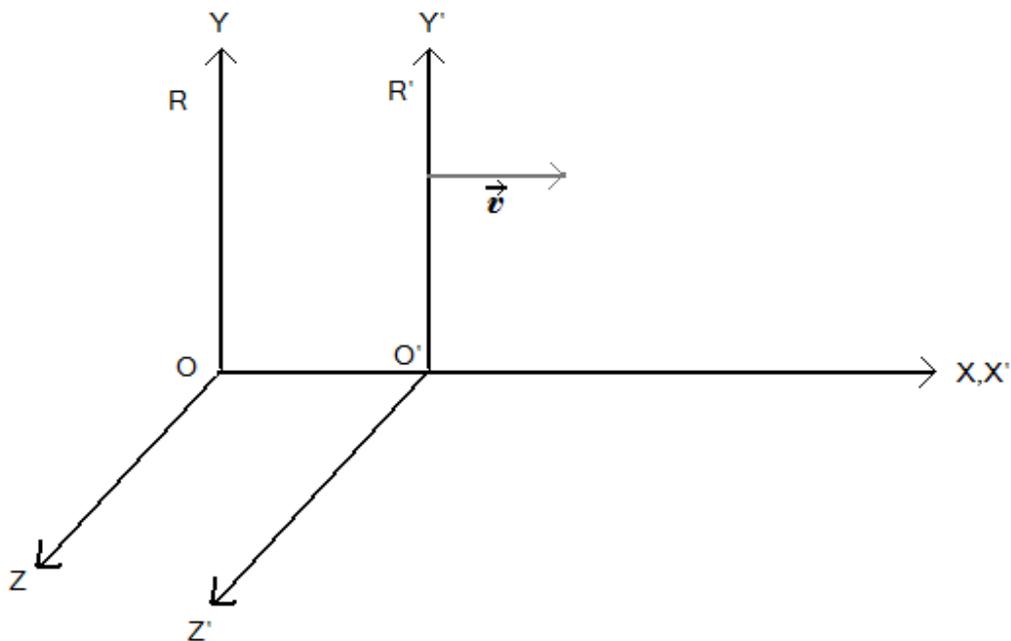


Figura A.3: Dois referenciais inerciais R e R', com R' se movendo com módulo de velocidade v na direção e sentido de X e X'. Os dois referenciais possuem eixos paralelos e X e X' são coincidentes.

Vamos agora tentar aplicar o princípio da relatividade de Galileu às ondas eletromagnéticas. Na Figura A.3 mostramos dois referenciais inerciais, R e R', sendo que R' se move com velocidade \vec{v} em relação a R na direção de X e X'. Estes referenciais possuem eixos paralelos e os eixos X e X' são coincidentes. Se no referencial R a velocidade da luz tem módulo c , de acordo com a transformação de Galileu para a velocidade [equação (A.3)], o módulo da velocidade da luz no referencial R' será $c' = c + v$. Dessa forma, podemos dizer que de acordo com o princípio da relatividade de Galileu a velocidade da luz possui valores diferentes em diferentes referenciais inerciais. Entretanto, o módulo da velocidade da luz é calculado pelas equações de Maxwell e possui valor constante, o que implica que as equações de Maxwell devem possuir formas diferentes em diferentes referenciais inerciais, ou seja, não são covariantes sob as transformações de Galileu. Em outras palavras, o princípio de Galileu não pode ser estendido para as leis que governam os fenômenos eletromagnéticos, e conseqüentemente, fenômenos óticos.

O fato de ondas eletromagnéticas serem consideradas oscilações no éter, aliado ao fato de as equações de Maxwell possuírem formas diferentes em diferentes referenciais inerciais leva a conclusão (errônea, como veremos a seguir) de que as leis da teoria eletromagnética clássica seriam válidas somente em um referencial especial, fixado no éter. Esta seria a única forma de uma onda eletromagnética que se move com velocidade \vec{c} em relação a um referencial fixado no éter possuir velocidade $\vec{c}' = \vec{c} + \vec{v}$ em um referencial inercial que se move com velocidade \vec{v} em relação ao referencial fixado no éter. Entretanto, ninguém havia sido capaz de detectar o éter e, conseqüentemente não era possível identificar o referencial no qual as equações de Maxwell seriam válidas. A validade da conclusão poderia ser verificada experimentalmente, como veremos na próxima seção.

5 – O Experimento de Michelson-Morley

Como discutido na seção anterior, as equações de Maxwell não são covariantes perante as transformações de Galileu para dois referenciais inerciais quaisquer. A existência do éter poderia resolver este problema se as equações de Maxwell possuísem a mesma forma em um referencial fixado no éter e em um

referencial inercial se movendo em relação ao éter em movimento retilíneo e uniforme. A existência deste referencial privilegiado, fixado no éter, pode ser verificada experimentalmente a partir de medidas dos efeitos do movimento de um dado referencial inercial em relação a um referencial fixado no éter no módulo da velocidade da luz. Fixando o módulo da velocidade da luz no éter como sendo c (de acordo com a previsão das equações de Maxwell), em outro referencial inercial qualquer, o módulo da velocidade da luz deveria ser diferente de c , de acordo com as transformações de Galileu para a velocidade.

Medir os efeitos do movimento de um referencial inercial qualquer em relação a um referencial no éter no valor da velocidade da luz é muito difícil em experimentos de laboratório. Isso ocorre porque mesmo o maior valor de velocidade obtida em laboratório é muito menor do que a velocidade da luz, requerendo uma precisão de medida muito grande. Entretanto, pode-se utilizar o movimento de translação da Terra em torno do Sol para tentar quantificar estes efeitos. A Terra está a uma distância média do Sol de $r=1,5 \times 10^{11}$ m e possui um período de translação de $T=3,16 \times 10^6$ s (1 ano = 365,25 dias x 24 horas/dia x 60 minutos/hora x 60 segundos/minuto = $3,16 \times 10^6$ segundos). Assumindo órbita circular, a velocidade tangencial da Terra é $v = \frac{2\pi r}{T} \approx 29,8 \times 10^3$ m/s, a qual é aproximadamente quatro ordens de grandeza menor que o módulo da velocidade da luz. Albert Michelson (1852-1931) foi a primeira pessoa a se dar conta de que poderia usar o movimento da Terra para medir movimentos relativos da Terra em relação ao éter. Michelson projetou um instrumento para medir a razão v^2/c^2 . Este instrumento recebeu o nome de *interferômetro de Michelson*, pois era baseado no fenômeno de interferência de ondas eletromagnéticas. O objetivo do experimento era medir a velocidade da luz em relação à Terra (ou seja, em relação ao interferômetro) e assim demonstrar que a Terra estava se movendo em relação ao éter, provando sua existência. A experiência de Michelson, realizada em 1881, não foi bem sucedida devido a limitações na precisão de medida de seu equipamento.

Em 1887, o experimento de Michelson foi repetido com o auxílio de Edward Morley (1838-1923), o qual ficou conhecido como o [experimento de Michelson-Morley](#). Michelson e Morley utilizaram um aparato instrumental mais sofisticado do que o utilizado anteriormente por Michelson. Na Figura A.4 apresentamos uma

representação esquemática deste experimento. A luz produzida em uma fonte de luz monocromática incide sobre um espelho semitransparente. Parte da luz atravessa este espelho e incide sobre o espelho A, sendo refletida ao longo do eixo horizontal, e novamente refletida pelo espelho semitransparente até atingir o detector. Outra parcela da luz incidente no espelho semitransparente é direcionada para o espelho B, onde é refletida, atravessando o espelho semitransparente e atingindo o detector. Note que o detector se move com velocidade de módulo v em relação a fonte emissora de luz.

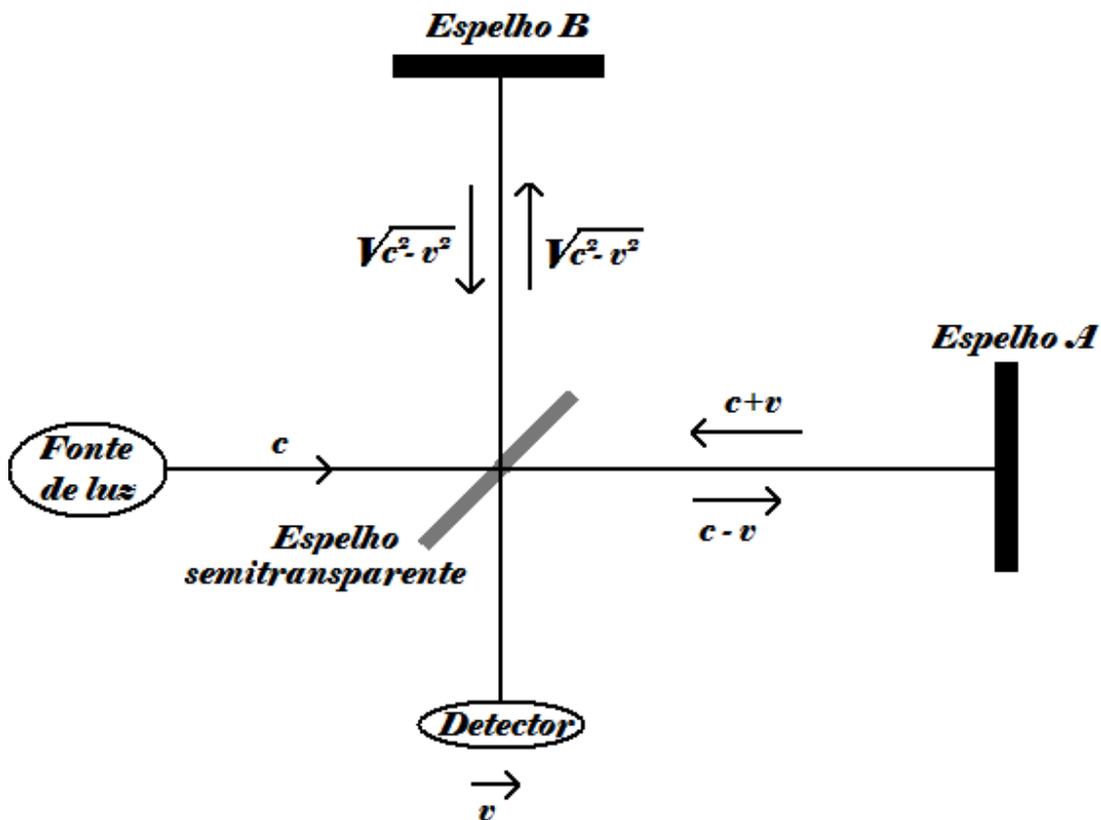


Figura A.4: Representação esquemática do experimento de Michelson-Morley.

Vamos considerar dois referenciais, R e R', fixando o primeiro no éter, onde a velocidade da luz possui módulo c e o segundo se movendo com velocidade v em relação a R na horizontal. Esta situação é semelhante a da Figura A.3 com R fixado no éter e R' fixado no detector (que possui a velocidade tangencial da Terra). Aplicando a transformação de Galileu para a velocidade, obtemos que a luz que vai do espelho semitransparente ao espelho A deve ter velocidade $c' = c - v$ em módulo, enquanto

que a luz que vai do espelho A para o espelho semitransparente possui módulo de velocidade de $c' = c + v$. Por outro lado, a luz que é refletida na direção vertical possui velocidade $c' = \sqrt{c^2 - v^2}$ em módulo, conforme mostrado na Figura A.5.

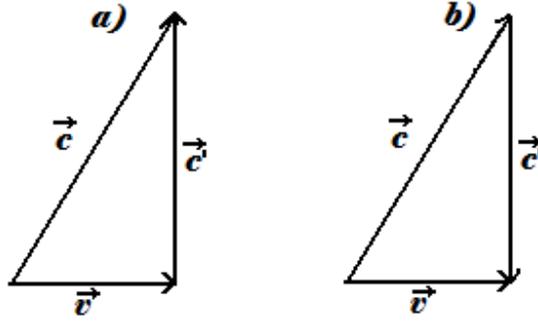


Figura A.5: Representação esquemática dos vetores velocidades para a luz. a) \vec{c}' é a velocidade da luz antes de ser refletida pelo espelho B, medida em um referencial fixo no detector (da Figura A.4) e b) \vec{c}' é a velocidade da luz após a reflexão no espelho B, medida num referencial fixo no detector.

Sendo L' a distância entre o espelho semitransparente e os espelhos A e B, medida em um referencial fixo no detector, podemos calcular o tempo que a luz demora para percorrer os dois trajetos da seguinte forma. O tempo de ida e volta do espelho semitransparente até o espelho A será:

$$t_A = \frac{L'}{c-v} + \frac{L'}{c+v} = \frac{2L'}{c^2-v^2} = \frac{2L'}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \approx \frac{2L'}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots\right), \quad (\text{A.6})$$

onde o termo $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$ foi expandido usando uma expansão binomial¹ em potências de v^2/c^2 e usamos somente os dois primeiros termos. Por outro lado, o tempo necessário para a luz percorrer o trajeto do espelho semitransparente até o espelho B e retornar ao espelho semitransparente é:

$$t_B = \frac{2L'}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L'}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2L'}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{2L'}{c} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots\right), \quad (\text{A.7})$$

onde também usamos a expansão binomial. Dessa forma, a diferença entre os tempos de percursos pelos dois caminhos é dada por:

$$\Delta t = t_A - t_B \approx \frac{2L'}{c} \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \right] \approx \frac{L'v^2}{c^3} \quad (\text{A.8})$$

¹ A expansão binomial em potências de x do termo $(1+x)^n$ pode ser expressa por: $(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2/2 + n(n-1)(n-2)x^3/6 + \dots$

A equação (A.8) é uma grandeza sempre positiva, uma vez que L', v e c são grandezas positivas e de acordo com esta equação podemos esperar que o movimento da Terra em relação ao éter introduziria uma diferença de tempo entre os dois caminhos da luz. Entretanto a diferença de tempo prevista não foi observada por Michelson e Morley e eles concluíram que a velocidade da luz em relação ao éter não poderia ser maior do que 5 km/s. Este resultado implicava que a idéia da existência de um referencial inercial especial fixo no éter para a teoria eletromagnética clássica estava errada, uma vez que o módulo da velocidade da luz neste referencial deveria ser 300.000 km/s ao invés de apenas 5 km/s. Este experimento foi repetido inúmeras vezes por diferentes cientistas e sob diferentes condições, porém o resultado foi sempre o mesmo: a velocidade da luz em relação ao éter é muito menor do que o esperado.

O resultado do experimento de Michelson e Morley implica na inexistência de um referencial especial para as equações de Maxwell e, conseqüentemente que estas não são covariantes perante as transformações de Galileu. Este experimento também indica o seguinte: a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais e as equações (A.6) e (A.7) ficam

$$t_A = t_B = 2L'/c. \quad (\text{A.9})$$

Dessa forma, podemos concluir que a teoria da relatividade newtoniana não se aplica as leis que regem a eletrodinâmica clássica e que as transformações de Galileu devem ser substituídas por uma nova transformação, na qual as relações matemáticas que governam o eletromagnetismo possuam as mesmas formas em todos os referenciais inerciais. Além do mais, essas novas transformações devem manter a covariância das leis da mecânica, como no caso das transformações de Galileu. A teoria da relatividade especial de Einstein foi desenvolvida com base na construção teórica destas novas transformações – as transformações de Lorentz, como veremos mais adiante.

Em resumo, o experimento de Michelson-Morley foi a primeira grande prova da inexistência do éter luminífero e de que a luz se propaga com a mesma velocidade em diferentes referenciais inerciais. Este experimento revelou a necessidade do desenvolvimento de novas transformações para posições e velocidades entre

referenciais inerciais, de acordo com as quais as equações de Maxwell apresentassem a mesma forma nos diferentes referenciais inerciais.

6 – Os dois Postulados de Einstein

As relações matemáticas das leis que governam o eletromagnetismo clássico não são covariantes perante as transformações de Galileu, ou seja, possuem formas diferentes em diferentes referenciais inerciais. Existem duas formas de resolver este problema. A primeira seria simplesmente abandonar a exigência de covariância das equações de Maxwell e a segunda é a construção de um novo conjunto de transformações no qual a simetria das equações de Maxwell seria preservada em todos os referenciais inerciais. Einstein escolheu a segunda opção, provavelmente porque as transformações de Galileu incorporam as idéias de tempo e espaço absolutos. A exigência de covariância das relações matemáticas que governam as leis físicas é conhecida como o princípio da relatividade de Einstein, que doravante chamaremos simplesmente de princípio da relatividade.

Uma das conseqüências do princípio da relatividade é a inexistência de experimentos capazes de detectar o tempo absoluto. Dessa forma, no caso do experimento de Michelson e Morley nada impede de afirmarmos que o interferômetro e a Terra estavam em repouso e o resultado do experimento ($\Delta t \approx 0$) pode ser interpretado simplesmente como uma conseqüência do princípio da relatividade. A concepção de um referencial especial associado ao éter também pode ser abandonada, uma vez que o módulo da velocidade da luz é o mesmo em todos os referenciais inerciais.

A teoria da relatividade especial, publicada em 1905 por Einstein, é baseada em dois postulados:

- **Postulado da covariância:** as relações matemáticas que governam os fenômenos físicos têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

Em outras palavras, o postulado da covariância nos diz que não existe um referencial privilegiado entre todos os referenciais inerciais. Este postulado estende o princípio da relatividade de Galileu para todos os fenômenos físicos, não somente para mecânica. Uma conseqüência deste postulado é o fim da concepção de espaço

absoluto, uma vez que todos os referenciais inerciais são equivalentes, não existe referencial privilegiado.

- **Postulado da constância da velocidade da luz:** O módulo da velocidade de propagação da luz no vácuo é igual em todas as direções em um dado referencial inercial e o mesmo em qualquer referencial inercial.

O postulado da velocidade da luz nos diz que o módulo da velocidade da luz no vácuo independe do movimento da fonte que a está emitindo. Este postulado descreve uma propriedade comum de todas as ondas, como por exemplo, a velocidade de propagação de uma onda sonora não depende se a fonte está se aproximando ou se afastando. De acordo com o efeito Doppler² para o som, a velocidade de propagação de uma onda sonora, em um determinado meio é constante, o que muda é a frequência desta onda (e conseqüentemente seu comprimento de onda) com a aproximação ou afastamento da fonte. Neste ponto vale ressaltar que a velocidade das ondas sonoras dependem das propriedades do meio em que se propagam, como por exemplo sua densidade – a velocidade do som no ar e na água são diferentes! Dessa forma, o postulado de Einstein para a velocidade da luz, coloca as ondas eletromagnéticas na mesma categoria das ondas mecânicas, uma vez que ambas possuem módulos de velocidades constantes.

² O efeito Doppler para as ondas sonoras no ar para uma fonte sonora se aproximando ou se afastando do detector pode ser escrito por:

$$\nu_d = \nu_f \frac{v \pm v_d}{v \mp v_f},$$

onde v é o módulo da velocidade do som no ar, v_d é o valor da velocidade do detector em relação ao ar, v_f é o módulo da velocidade da fonte sonora em relação ao ar, v é o módulo da velocidade do som no ar, ν_f é a frequência da onda sonora emitida pela fonte e ν_d é a frequência detectada. O uso dos sinais depende se a fonte e o detector estão se aproximando ou se afastando. Usa-se o sinal *de cima* para o movimento de aproximação e o *de baixo* para o movimento de afastamento em relação a um referencial fixo no ar (em repouso).

RESUMO DA UNIDADE

Referenciais Inerciais: De acordo com a primeira lei de Newton é possível encontrar um referencial (ou um conjunto de referenciais) no qual uma partícula livre permanece em repouso ou em movimento retilíneo com velocidade constante. Estes referenciais são chamados de referenciais inerciais.

Relatividade de Galileu: As transformações de Galileu para as posições são dadas por:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t. \end{cases}$$

onde \vec{r}' é posição da partícula no instante de tempo t' , medidos no referencial inercial R' , \vec{r} é sua posição no instante t no referencial R e R' se move com velocidade constante v em relação a R .

A transformação de Galileu para a velocidade é dada por

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}$$

onde \vec{v}' e \vec{v} são as velocidades das partículas medidas nos referenciais inerciais R' e R , respectivamente.

O Éter Luminífero: No Sec. XVIII acreditava-se que todas as ondas necessitavam de um meio para se propagarem o que os levou a propor a existência de um meio hipotético, chamado *éter luminífero*, no qual as ondas eletromagnética se propagariam. A inexistência do éter foi comprovada experimentalmente no final do Sec. XVIII pelo *experimento de Michelson-Morley*. Este experimento revelou a necessidade do desenvolvimento de novas transformações para as posições e velocidades entre referenciais inerciais, de acordo com as quais as equações que fundamentam a teoria eletromagnética apresentassem a mesma forma nos diferentes referenciais inerciais.

Postulados de Einstein: Postulado da covariância: as relações matemáticas que governam os fenômenos físicos têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

Postulado da constância da velocidade da luz: O módulo da velocidade de propagação da luz no vácuo é igual em todas as direções em um dado referencial inercial e o mesmo em qualquer referencial inercial.

EXERCÍCIOS

1 – Discuta a importância da primeira lei de Newton na definição de um referencial inercial.

2 – Discuta a seguinte afirmação: “Qualquer referencial fixo na Terra é não inercial”.

3 – Um trem se desloca com velocidade constante de 60 km/h em trilhos retilíneos. Dentro de um vagão, uma pessoa anda com uma velocidade de 10 km/h em sentido a frente do trem, medida em um referencial inercial fixo no trem. Use as transformadas de Galileu para a velocidade e posição para estimar

- Qual é a velocidade da pessoa em relação a um ponto fixo nos trilhos atrás do trem? [Resposta: 70 km/h]
- Qual é a distância que a pessoa se desloca em 11 segundos em relação a um referencial fixo no trem? [Resposta: 30 m]
- Qual é a distância que a pessoa se desloca em 11 segundos em relação a um ponto fixo nos trilhos? [Resposta: 214 m]

4 – Um certo automóvel A se move com velocidade constante de módulo $u = 100$ km/h em relação a um referencial (R) fixo no ponto P, conforme mostrado na figura abaixo. Se um automóvel B possui velocidade constante $v = 50$ km/h em relação a este mesmo ponto. Qual é a velocidade (módulo, direção e sentido) do automóvel A medida em um referencial R' fixo no automóvel B? [Resposta: O carro A terá uma velocidade de módulo 77,9 km/h, fazendo um ângulo de 79,4 graus com a horizontal]

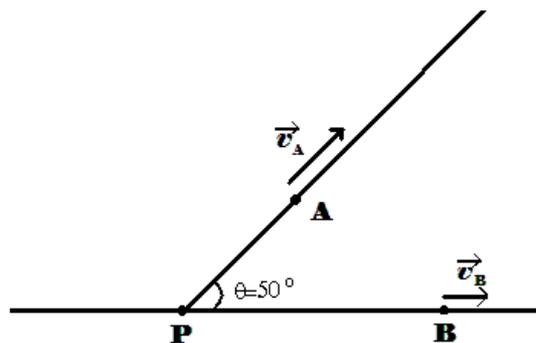


Figura A.6: Dois automóveis A e B se movem com velocidades \vec{v}_A e \vec{v}_B em relação a um referencial inercial R fixo no ponto P.

5 - Uma nave espacial se desloca com velocidade de módulo $0,5c$ em relação a Terra. Um astronauta na parte de trás da nave acende uma lanterna para iluminar a parte

dianteira da nave. Utilize a transformação de Galileu para a velocidade para encontrar qual é o módulo da velocidade de um fóton, que se propaga da parte de trás para a parte da frente da nave, em relação à Terra. Considere o módulo da velocidade do fóton em relação à nave como sendo igual a c (módulo da velocidade da luz). Discuta a validade do valor encontrado para esta velocidade usando os postulados de Einstein. [Resposta numérica: 1,5c]

Unidade B: Transformações de Lorentz

Na unidade anterior discutimos as origens da teoria da relatividade de Einstein e observamos que as equações matemáticas representavam um problema para o princípio da relatividade clássica, uma vez que estas não são covariantes perante as transformações de Galileu. Este fato levou os cientistas da época sugerirem a existência de um referencial privilegiado fixado no éter para as equações de Maxwell. Porém a existência deste referencial foi descartada através de atividades experimentais como a experiência de Michelson-Morley. O princípio da relatividade de Einstein supõe que as expressões matemáticas que descrevem qualquer fenômeno físico devem possuir a mesma forma em todos os referenciais inerciais, exigindo assim um novo conjunto de transformações para as grandezas físicas de um referencial inercial para outro. Nesta unidade, apresentamos as transformações de Lorentz, sob as quais tanto as equações de Maxwell, quanto as equações que descrevem as leis da mecânica são covariantes. Ao contrário das transformações de Galileu, as transformações de Lorentz levam em consideração o fato experimental de que a velocidade da luz no vácuo possui o mesmo módulo c em todos os referenciais inerciais.

1 – Transformações de Posição e Tempo

Nosso objetivo é encontrar como as posições e tempos se modificam de um referencial inercial para outro. De acordo com os postulados de Einstein, estas transformações devem satisfazer as seguintes condições:

- As expressões matemáticas que governam as leis físicas devem possuir a mesma forma em todos os referenciais inerciais;
- Concordar com as transformações de Galileu no limite baixas velocidades, pois as expressões matemáticas que descrevem as leis da mecânica clássica são covariantes perante as transformações de Galileu;
- O módulo da velocidade da luz no vácuo deve ser o mesmo em todos os referenciais inerciais;
- Transformar a coordenada temporal, além das coordenadas espaciais, uma vez que as concepções de tempo e espaço absolutos são abandonadas na teoria da relatividade de Einstein.

Para encontrar as transformações que satisfazem as condições acima vamos considerar dois referenciais inerciais conforme ilustrado na Figura B.1. Nesta figura mostramos dois referenciais inerciais, R e R', com R' se movendo com uma velocidade \vec{v} em relação a R. Estes referenciais representam o caso particular, com eixos paralelos, com X e X' coincidentes e origens coincidentes em $t=t'=0$.

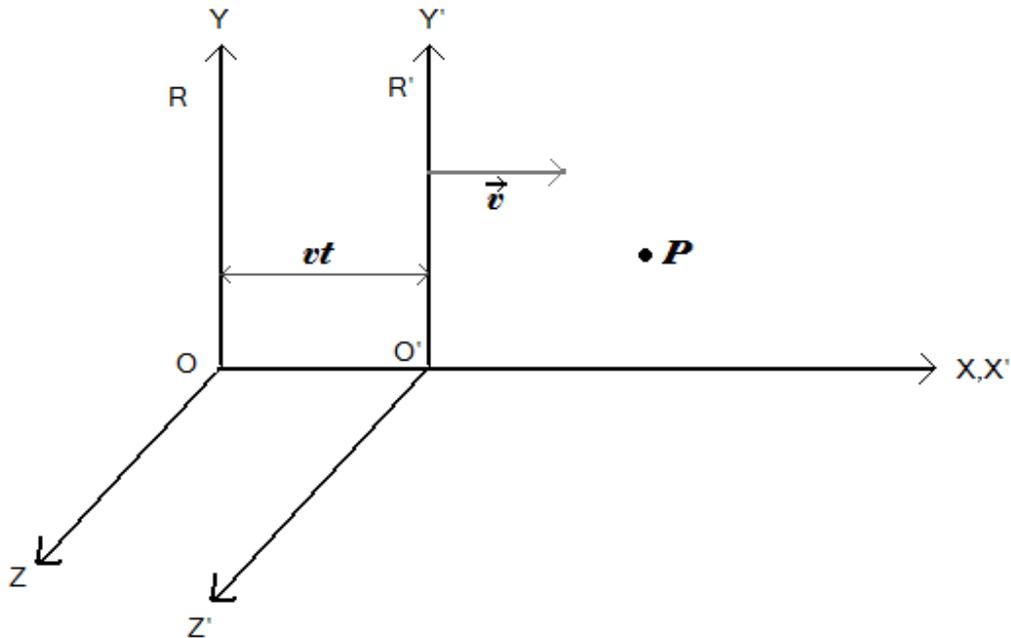


Figura B.1: Dois referenciais inerciais R e R', com R' movendo-se com velocidade \vec{v} em relação a R. R e R' possuem eixos paralelos e X e X' são coincidentes.

Para caracterizar um evento físico, além da posição espacial, precisamos especificar o instante de tempo em que ele ocorreu. Por exemplo, um evento físico que ocorreu no ponto P (Figura B.1) é caracterizado pelas coordenadas (x,y,z,t) no referencial R e (x',y',z', t') em R'. As transformações de Galileu (equações A.1) nos fornecem:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

estas transformações são bem sucedidas no limite de baixas velocidades ($v \ll c$), ou seja, na mecânica newtoniana. Podemos generalizar as transformadas de posição para a coordenada x para qualquer valor de v menor do que c da seguinte forma:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (\text{B.2})$$

com $\gamma \rightarrow 1$ para $v \ll c$. A transformação inversa é

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (\text{B.3})$$

Vamos agora utilizar o fato experimental de o módulo da velocidade da luz ser o mesmo em qualquer referencial inercial para verificar como a coordenada temporal se modifica do referencial R para o referencial R'. Para tal, vamos considerar a emissão de um raio de luz em $t = t' = 0$ por uma fonte localizada na origem, ou seja, em $x = x' = 0$. Como o módulo da velocidade da luz vale c tanto em R quanto em R', implica que a luz percorre uma distância $x = ct$ em R e $x' = ct'$ em R'. Substituindo x e x' nas equações (B.2) e (B.3) obtemos:

$$ct' = \gamma(c - v)t \quad (\text{B.4})$$

e

$$ct = \gamma(c + v)t'. \quad (\text{B.5})$$

Isolando t' da primeira expressão, obtém-se

$$t' = \frac{\gamma(c-v)t}{c}. \quad (\text{B.6})$$

Agora substituindo t' em (B.5) encontramos

$$c^2 = \gamma^2(c + v)(c - v) = \gamma^2(c^2 - v^2)$$

e isolando γ obtemos:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{B.7})$$

onde $\beta = \frac{v}{c}$. Observe que quando $v \ll c$ ($\beta \approx 0$), $\gamma \rightarrow 1$, como esperado das equações (B.2) e (B.3). Por outro lado, quando $v \rightarrow c$, $\gamma \rightarrow \infty$.

Substituindo $t = \frac{cx}{c^2}$ na equação (B.6) e realizando alguns passos algébricos, obtemos:

$$t' = \gamma\left(t + \frac{vx}{c^2}\right). \quad (\text{B.8})$$

A equação (B.8) é a transformação temporal do referencial R para o referencial R'. É importante notar que o ritmo do tempo passa diferente nos dois referenciais, ou seja, a concepção de tempo absoluto é abandonada nesta transformação. Note que quando $v \ll c$, $\gamma \rightarrow 1$ e $t' = t$ como esperado da transformação de Galileu.

Juntando as transformações de posição com a transformação temporal, obtemos:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}). \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Estas equações relacionam as coordenadas espaço-temporais de um mesmo evento físico em dois referenciais inerciais quaisquer. Neste ponto devemos ressaltar que as expressões $y' = y$ e $z' = z$ aparecem devido à escolha do caso particular de movimento de R' em relação a R, no qual as componentes y e z da velocidade de R' em relação a R são nulas. As transformações inversas ficam

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}). \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Estas transformações são conhecidas como as **transformações de Lorentz**, em homenagem ao físico [Hendrik Antoon Lorentz](#) (1853 – 1928), que foi a primeira pessoa a derivar estas relações. Devemos notar que se as transformações de Galileu são recuperadas no limite de $v \ll c$ e, por outro lado, se $v > c$ o fator γ se torna um número imaginário e, conseqüentemente, x' e t' também se tornam imaginários, implicando que é fisicamente impossível a existência de partículas ou objetos se movendo com módulos de velocidades maiores do que o da velocidade da luz no vácuo.

2 – Dilatação Temporal

De acordo com a transformação de Lorentz para o tempo, o ritmo do tempo é diferente em diferentes referenciais inerciais. Para discutir qual é a relação entre o ritmo em diferentes referenciais inerciais, vamos considerar os referenciais da Figura B.1, com R' se movendo com velocidade de módulo v na direção e sentido de X e X'. Vamos considerar dois eventos físicos, como por exemplo, o acender e apagar de uma lâmpada, que ocorrem no mesmo lugar do espaço $(x', 0, 0)$ no referencial R' nos instantes de tempo t'_1 (a lâmpada se acende) e t'_2 (a lâmpada se apaga). O intervalo de tempo transcorrido entre os dois eventos é $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ no referencial R'. Queremos

encontrar qual é o intervalo de tempo transcorrido no referencial R $\Delta t = t_2 - t_1$. De acordo com a transformação de Lorentz para o tempo [dada pela última equação das expressões (B.10)] obtemos:

$$t_1 = \gamma(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2})$$

$$t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}),$$

então

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}) - \gamma(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2}) = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

e usando $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, obtemos:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \tag{B.11}$$

O fator γ é dado pela equação (B.7) e seu valor é sempre maior ou igual a unidade, o que implica em $\Delta t \geq \Delta t'$. A igualdade ocorre somente no caso particular em que a velocidade relativa entre os dois referenciais é nula. Em outras palavras, o intervalo de tempo medido por relógios idênticos em dois referenciais inerciais é diferente, sendo que o intervalo de tempo menor é medido por um relógio em repouso no referencial onde o evento físico aconteceu. Geralmente usa-se a notação Δt_0 para o intervalo associado a um fenômeno físico que ocorre em uma mesma posição espacial e chama-se Δt_0 de intervalo de tempo próprio. Então podemos reescrever a equação acima como:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0. \tag{B.12}$$

Esta equação nos diz que o intervalo de tempo próprio entre dois eventos físicos é menor do que o intervalo de tempo transcorrido entre os mesmos dois eventos medido em qualquer outro referencial inercial. Em outras palavras, o ritmo de dois relógios idênticos não é o mesmo em diferentes referenciais: um relógio em movimento é mais lento do que um relógio em repouso, ou ainda, o ritmo tempo não é absoluto. A este fenômeno dá-se o nome de **dilatação temporal**.

EXEMPLO: Uma nave espacial viaja com uma velocidade de módulo $0,7c$ em missão a um planeta que orbita a estrela Próxima Centauri³. Após um intervalo de 10 horas a partir do lançamento (medido em um relógio na nave), um dos tripulantes comunica-se

³ A estrela Próxima Centauri é a estrela mais próxima da Terra, depois do Sol, localizada a 4,3 anos-luz de distância. Lembrando que 1 ano-luz corresponde a distância que a luz percorre em um intervalo de tempo de 1 ano.

via rádio com a base na Terra pela primeira vez. Quanto tempo leva para os cientistas da base receber este sinal de rádio?

Solução: Primeiramente vamos definir os sistemas de referência R fixo na Terra e R' fixo na nave. O intervalo de tempo de 10 horas é medido em relação ao referencial R', no qual o relógio está em repouso, ou seja, 10 h é o intervalo de tempo próprio Δt_0 . Podemos encontrar o tempo decorrido no referencial R na Terra desde o lançamento da nave até o momento do envio do sinal de rádio pela equação (B.12):

$$\Delta t_e = \gamma \Delta t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Delta t_0,$$

onde substituímos o fator γ pela equação (B.7). Substituindo $v = 0.7c$ e $\Delta t_0 = 10\text{h}$, obtemos

$$\Delta t_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.7c}{c}\right)^2}} 10\text{ h} = 14\text{ h}.$$

Devemos ainda considerar o tempo gasto para o sinal de rádio viajar desde a nave até a Terra. Supondo que no momento da decolagem, a posição da nave medida nos referenciais R e R' são iguais, $x_i = x'_i = 0$, ou seja, R e R' possuem origens coincidentes. Dessa forma, ao emitir o sinal de rádio a nave estará a uma distância x da Terra, dada por [equação (B.10)]:

$$x = \gamma v \Delta t_0 = \frac{v \Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{0.7c \cdot 10\text{ h}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.7c}{c}\right)^2}} = 9,8 \text{ horas-luz}.$$

Como o sinal de rádio é uma onda eletromagnética ele viaja com velocidade de módulo c e, conseqüentemente o tempo gasto para percorrer esta distância é:

$$\Delta t_r = \frac{x}{c} = 9,8 \text{ horas}.$$

Os cientistas da base receberão o primeiro sinal de rádio $\Delta t = \Delta t_e + \Delta t_r = 23,8$ horas após o lançamento.

3 – Contração de Lorentz

A **contração de Lorentz** – também conhecida como contração das distâncias ou contração dos comprimentos – é um fenômeno que está intimamente relacionado ao fenômeno da dilatação do tempo, descrito na seção anterior. Para discutir este fenômeno, vamos considerar os referenciais R e R', mostrados na Figura B.2.

Novamente R e R' possuem eixos paralelos e R' se move como uma velocidade de módulo v na direção e sentido de X e X'. Vamos considerar um objeto, como por exemplo, uma régua, disposta paralelamente aos eixos X e X' (como mostrado na figura). A régua encontra-se em repouso em relação a R' e suas extremidades possuem coordenadas espaciais x'_1 e x'_2 . No referencial R a régua possui velocidade \vec{v} e coordenadas x_1 e x_2 . De acordo com as transformações de Lorentz temos:

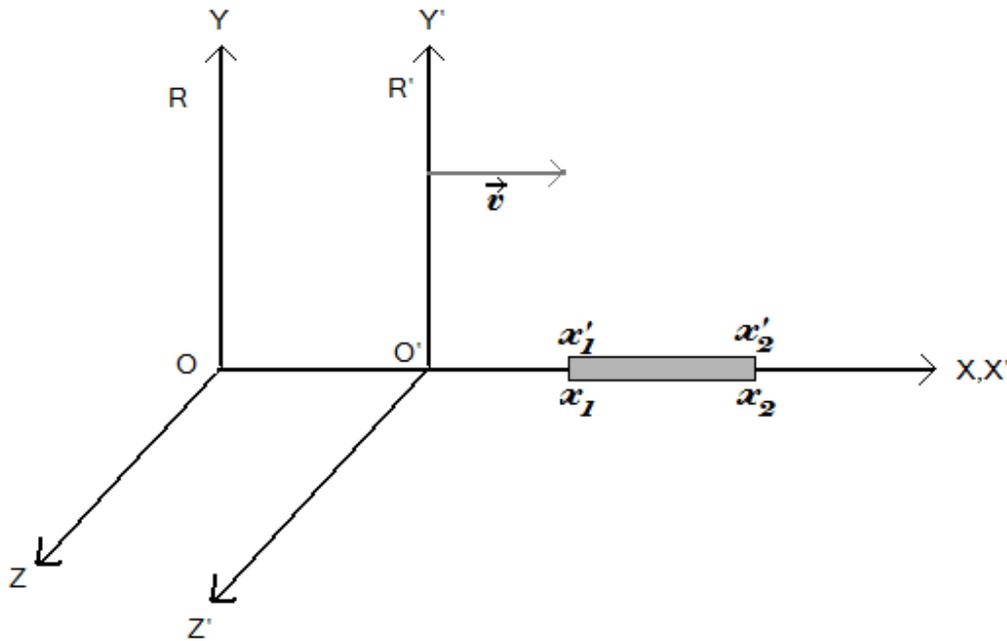


Figura B.2: Dois referenciais inerciais R e R', com R' movendo-se com velocidade \vec{v} em relação a R. R e R' possuem eixos paralelos e X e X' são coincidentes. As extremidades de uma régua situada paralelamente aos eixos X e X' possuem coordenadas x_1 e x_2 em R e x'_1 e x'_2 em R'.

$$\begin{aligned}x'_1 &= \gamma(x_1 - vt_1) \\x'_2 &= \gamma(x_2 - vt_2).\end{aligned}$$

O comprimento da régua é dado por $L = x_2 - x_1$ no referencial R e $L' = x'_2 - x'_1$ no referencial R', com as posições das extremidades da régua medidas no mesmo instante de tempo t , ou seja, $t_1 = t_2 = t$. Dessa forma, temos:

$$L' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt) - \gamma(x_1 - vt) = \gamma(x_2 - vt - x_1 + vt) = \gamma(x_2 - x_1).$$

Substituindo $x_2 - x_1 = L$, obtemos:

$$L' = \gamma L \tag{B.13}$$

Como $\gamma \geq 1$ [dado pela equação (B.7)] a equação (B.13) implica em $L' \geq L$. A igualdade ocorre somente no caso particular em que a velocidade relativa entre os dois

referenciais é nula. Geralmente o comprimento medido no referencial em que o objeto encontra-se em repouso é representado por L_0 e recebe o nome de *comprimento próprio*. No caso de nosso exemplo, a régua encontra-se com velocidade \vec{v} em relação ao referencial R e em repouso em relação ao referencial R'. Substituindo $L' = L_0$, na equação (B.13), obtemos:

$$L_0 = \gamma L. \quad (\text{B.14})$$

Devemos ressaltar que o efeito de contração das distâncias não é um fato irreal (uma ilusão), mas sim é um efeito real, que está associado à escolha do referencial em relação ao qual as posições das extremidades da régua são determinadas.

Nesta seção utilizamos como um exemplo o caso particular em que a direção da velocidade de R' em relação a R era coincidente com a direção de X e X'. Dessa forma a largura e a espessura da régua não se modificaram quando medidas em R ou em R', ou seja, $(y'_2 - y'_1) = (y_2 - y_1)$ e $(z'_2 - z'_1) = (z_2 - z_1)$, pois de acordo com as transformações de Lorentz $y' = y$ e $z' = z$. Em um caso mais geral, onde a velocidade de R' em relação a R pode ter qualquer direção e sentido, observa-se que objetos bidimensionais e tridimensionais assumem formas diferentes em diferentes referenciais inerciais.

O *significado relativístico do ato de medir* é estabelecido quando falamos que as posições das extremidades da régua devem ser medidas no mesmo instante de tempo. Note que este significado é diferente do que o ato de fotografar a régua em um determinado instante de tempo, uma vez que o módulo da velocidade da luz é finito, o tempo que os raios de luz de uma extremidade da régua demoram a atingir a câmera fotográfica é diferente do que o tempo que os raios da outra extremidade demoram para atingir o detector. Dessa forma, o ato de fotografar resulta em um comprimento diferente para a régua do que o resultado obtido por uma medida no contexto da relatividade especial.

EXEMPLO: Um passageiro de uma nave espacial que se desloca com velocidade de módulo $v = 0,8c$ em relação à Terra mede o comprimento de uma mesa a bordo como sendo 1 m. Qual será o comprimento desta mesa medida em um referencial na Terra? Suponha que a maior dimensão da mesa esteja orientada ao longo da linha que conecta a nave a Terra.

Solução: Fixando o referencial R' na nave e o referencial R na Terra, podemos determinar o comprimento da mesa em R pela equação (B.14):

$$L_0 = \gamma L.$$

Lembrando que o comprimento próprio é medido no referencial em que o objeto encontra-se em repouso, ou seja, $L_0 = 1$ m. Substituindo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$, obtemos

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

e finalmente substituindo os valores numéricos, obtemos o comprimento da mesa medido em um referencial aqui na Terra

$$L = 1 \text{ m} \sqrt{1 - \left(\frac{0,8c}{c}\right)^2} = 0,6 \text{ m}.$$

O comprimento da mesa medido na Terra é 40% menor do que o valor medido por um passageiro da nave. Se seu comprimento da mesa estivesse orientado perpendicularmente a linha que conecta a nave à Terra, seu comprimento medido em um referencial da nave seria igual ao valor medido em um referencial na Terra (ver as transformações de Lorentz para as posições).

4 – Simultaneidade

Dois eventos simultâneos em um dado referencial inercial acontecem no mesmo instante de tempo (medido em relação a este referencial), no entanto, a transformação temporal de Lorentz sugere que em outro referencial inercial qualquer estes eventos podem ser não simultâneos. Isso ocorre porque a coordenada temporal em um referencial R' que se move com velocidade constante em relação a outro referencial R, além de depender da velocidade relativa dos dois referenciais, também depende da posição espacial onde o evento ocorreu no referencial R (ver equações B.9). Em outras palavras, podemos dizer que dois relógios sincronizados em um dado referencial inercial, podem não estar sincronizados em outros referenciais inerciais.

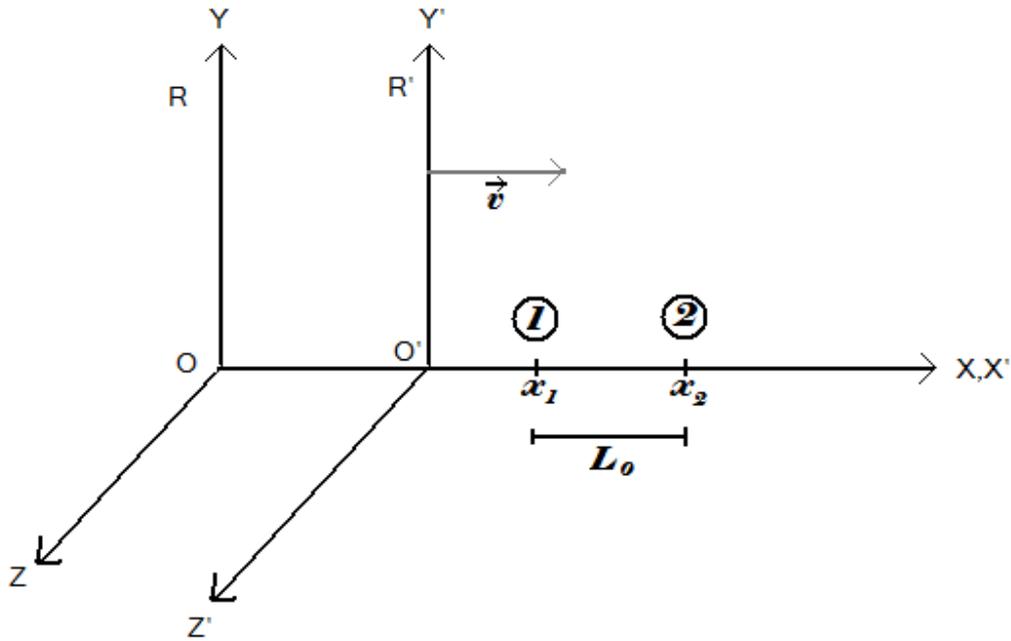


Figura B.3: Dois relógios idênticos 1 e 2 estão separados por uma distância L_0 e em repouso em relação ao referencial inercial R. R' é um referencial inercial que se move com velocidade \vec{v} em relação a R.

Para discutir a diferença de sincronização de relógios em diferentes referenciais inerciais, vamos considerar os dois referenciais inerciais de eixos paralelos mostrados na Figura B.3. Vamos considerar dois relógios, 1 e 2, em repouso em relação ao referencial R e separados por uma distância $L_0 = x_2 - x_1$, onde x_1 e x_2 são as posições dos relógios. Note que usamos a nomenclatura L_0 para representar a distância entre os relógios, onde L_0 é a distância própria entre os relógios (definida na seção anterior). Vamos agora considerar dois eventos simultâneos, que ocorram nas posições x_1 e x_2 no referencial R. Como os dois relógios estão em repouso em relação R, suas marcações serão idênticas, ou seja, $t_1 = t_2 = t$. De acordo com a transformação temporal de Lorentz, no referencial R' os dois eventos ocorrem nos estantes t'_1 e t'_2 , dados por:

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right) \quad (\text{B.15})$$

e

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right). \quad (\text{B.16})$$

O intervalo de tempo decorrido entre os dois eventos no referencial R' será:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right) = \gamma\left(t - \frac{vx_2}{c^2} - t + \frac{vx_1}{c^2}\right) = -\gamma\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1),$$

onde usamos $t_1 = t_2 = t$. Agora, substituindo $L_0 = x_2 - x_1$, obtemos

$$\Delta t' = -\gamma \frac{v}{c^2} L_0.$$

Esta equação nos diz que dois eventos somente são simultâneos em dois referenciais somente quando $v \rightarrow 0$, uma vez que $\gamma \geq 1$, $L_0 > 0$ e c é o módulo da velocidade da luz (que é uma constante não nula).

De acordo com o fenômeno da dilatação temporal, o intervalo de tempo em R' é dilatado por um fator γ em relação ao intervalo de tempo em R ($\Delta t' = \gamma \Delta t$), então:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} = -\frac{v}{c^2} L_0. \quad (\text{B.17})$$

Esta equação nos mostra que $\Delta t = t_2 - t_1 < 0$. Entretanto, supomos acima que os dois eventos ocorreram simultaneamente em R e assim esperávamos encontrar $\Delta t = 0$, uma vez que $\Delta t = t_2 - t_1$ e $t_1 = t_2 = t$. De fato, a equação (B.17) mede a diferença de sincronização dos relógios em R para uma medida realizada em R' . Esta expressão nos mostra também que para um observador em R' , o evento ocorre mais tarde no relógio situado em x_1 , ou seja, este relógio está atrasado em relação ao relógio situado em x_2 .

Em resumo, dois eventos simultâneos em um dado referencial inercial, não podem ser simultâneos em qualquer outro referencial inercial.

5 – Transformações de Velocidade

Vamos investigar como a velocidade se transforma de um referencial inercial para outro. Para isso consideremos dois referenciais inerciais de eixos paralelos (R e R'), com origens coincidentes em $t = t' = 0$ e com R' se movendo com velocidade constante de módulo v na direção e sentido de X e X' , conforme mostrado na Figura B.4. Consideremos ainda o movimento de uma partícula localizada no ponto P com velocidade \vec{u} no referencial R e \vec{u}' no referencial R' . Estamos interessados em encontrar a relação entre \vec{u} e \vec{u}' . Lembrando que a velocidade é definida como a derivada da posição da partícula em relação ao tempo, partimos das transformações de Lorentz para as posições e para o tempo [dadas pelas equações (B.9)], podemos escrever, na forma diferencial:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma(dt - \frac{vdx}{c^2}). \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

onde dx' , dy' e dz' são as componentes do deslocamento da partícula no intervalo de tempo dt' , medidas no referencial R' e dx , dy e dz correspondem as componentes do deslocamento da partícula no referencial R no intervalo de tempo correspondente dt .

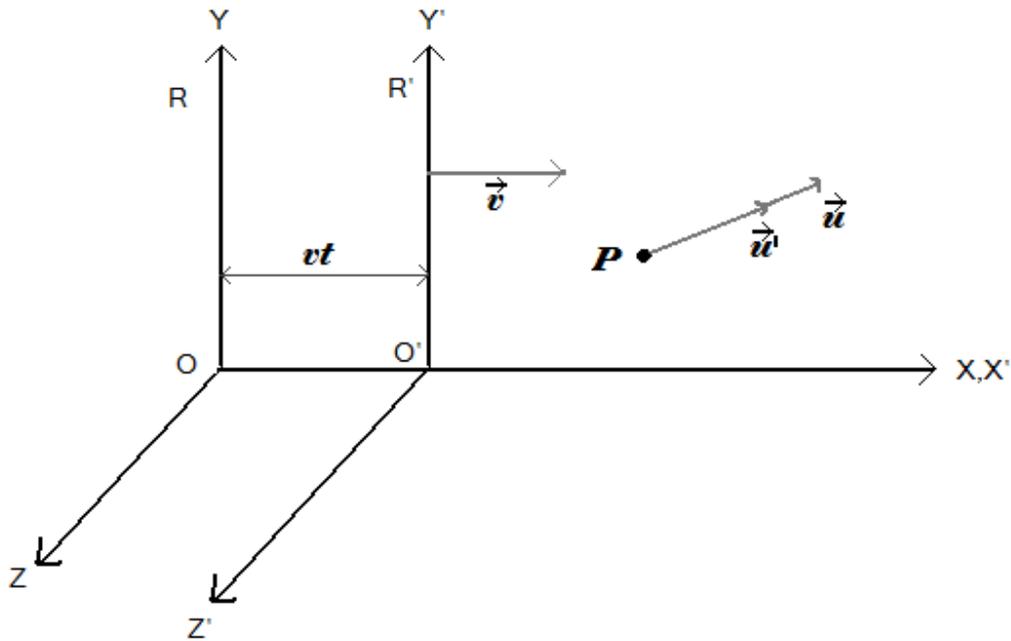


Figura B.4: Dois referenciais inerciais R e R' , com eixos paralelos e origens coincidentes em $t = t' = 0$. R' move-se com velocidade \vec{v} em relação a R . Uma partícula localizada no ponto P possui velocidade \vec{u} em R e \vec{u}' no referencial R' .

As componentes da velocidade da partícula no referencial R' se relacionam com as componentes de sua velocidade no referencial R , da seguinte forma:

$$\begin{cases} u'_X = \frac{dx'}{dt'} \\ u'_Y = \frac{dy'}{dt'} \\ u'_Z = \frac{dz'}{dt'} \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Substituindo as equações (B.18) nas equações (B.19), obtemos:

$$\begin{cases} u'_X = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \\ u'_Y = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt})} \\ u'_Z = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt})}. \end{cases}$$

Finalmente, substituindo as componentes da velocidade medidas no referencial R dadas por $u_X = \frac{dx}{dt}$, $u_Y = \frac{dy}{dt}$ e $u_Z = \frac{dz}{dt}$, obtemos

$$\begin{cases} u'_X = \frac{u_X - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_X} \\ u'_Y = \frac{u_Y}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} u_X)} \\ u'_Z = \frac{u_Z}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} u_X)}. \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Estas equações são as **transformações de Lorentz para a velocidade**. Podemos obter as transformações inversas (para o caso em que se conheça a velocidade da partícula no referencial R' e quisermos determiná-la no referencial R) simplesmente substituindo v por $-v$ nas equações (B.20), resultando em

$$\begin{cases} u_X = \frac{u'_X + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_X} \\ u_Y = \frac{u'_Y}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2} u'_X)} \\ u_Z = \frac{u'_Z}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2} u'_X)}. \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Vale ressaltar que as equações para as transformações de velocidades obtidas aqui são válidas somente para o caso particular em que temos dois referenciais inerciais com eixos paralelos e origens coincidentes em $t = t' = 0$ como suposto acima.

Para discutir os resultados acima, vamos considerar um caso ainda mais particular, no qual os referenciais R e R' possuem as mesmas características dos apresentados na Figura B.4, porém para uma partícula que se desloca paralelamente aos eixos X e X', com velocidade \vec{u} no referencial R. As componentes da velocidade da partícula nos eixos perpendiculares a X e X' serão nulas nos dois referenciais e $u_x = u$ e $u'_x = u'$. Neste caso as equações (B.20) e (B.21) resultam em

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2} u} \quad (\text{B.22})$$

e

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'}, \quad (\text{B.23})$$

respectivamente. Estas equações nos mostram que se $u' \rightarrow c$ e $v \rightarrow c$, então $u \rightarrow c$. Por outro lado, se $u' < c$ e $v < c$, obtém-se $u < c$. Dessa forma, o vetor velocidade resultante não pode ter módulo maior do que o módulo da velocidade da luz. Finalmente, se $v \rightarrow 0$, obtemos $u' = u - v$. Este resultado é o mesmo obtido a partir da

transformação de Galileu para a velocidade, como esperado no limite de baixas velocidades de R' em relação a R.

6 – Transformações de Aceleração

Vamos considerar as mesmas condições usadas para obter as equações (B.22) e (B.23) para demonstrar as transformações de Lorentz para a aceleração. Tomando a diferencial da equação (B.23) obtemos:

$$du' = \frac{du(1 - \frac{v}{c^2}u) - (u-v)(-\frac{v}{c^2}du)}{(1 - \frac{v}{c^2}u)^2}. \quad (\text{B.24})$$

Note que utilizamos a regra do quociente $[d(\frac{u}{v}) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}]$ para escrever a equação acima. A aceleração medida no referencial inercial R', definida como $a' = \frac{du'}{dt'}$, pode ser obtida dividindo a equação (B.24) pela última equação em (B.18), resultando em

$$a' = \frac{du'}{dt'} = \frac{\frac{du(1 - \frac{v}{c^2}u) - (u-v)(-\frac{v}{c^2}du)}{(1 - \frac{v}{c^2}u)^2}}{\gamma(dt - \frac{vdx}{c^2})} = \frac{du(1 - \frac{v}{c^2}u) - (u-v)(-\frac{v}{c^2}du)}{\gamma(dt - \frac{vdx}{c^2})(1 - \frac{v}{c^2}u)^2}.$$

Multiplicando e dividindo o lado direito da equação acima por dt , obtemos:

$$a' = \frac{\frac{du}{dt}(1 - \frac{v}{c^2}u) + \frac{du}{dt}(u-v)(\frac{v}{c^2})}{\gamma(\frac{dt}{dt} - \frac{v \frac{dx}{dt}}{c^2})(1 - \frac{v}{c^2}u)^2}.$$

Agora substituindo $u = \frac{dx}{dt}$ e $a = \frac{du}{dt}$, obtemos:

$$a' = \frac{a(1 - \frac{v}{c^2}u) + a(u-v)(\frac{v}{c^2})}{\gamma(1 - \frac{vu}{c^2})(1 - \frac{v}{c^2}u)^2} = \frac{a(1 - \frac{v}{c^2}u + \frac{v}{c^2}u - \frac{v^2}{c^2})}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}u)^3} = \frac{a(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}u)^3}.$$

Finalmente usamos a equação (B.7) para substituir $(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \gamma^{-2}$ na equação acima, obtendo:

$$a' = \frac{a}{\gamma^3(1 - \frac{v}{c^2}u)^3}. \quad (\text{B.25})$$

A equação (B.25) é a transformação de Lorentz para o módulo da aceleração do referencial R para o referencial R'. A transformação inversa pode ser obtida substituindo-se v por $-v$ e u por u' na equação acima, resultando em:

$$a = \frac{a'}{\gamma^3(1 + \frac{v}{c^2}u')^3}. \quad (\text{B.26})$$

Devemos lembrar que as equações (B.25) e (B.26) são válidas somente para o caso particular em que temos dois referenciais R e R', com eixos paralelos e origens coincidentes em $t = t' = 0$, no qual a velocidade da partícula, e conseqüentemente sua aceleração, possui a direção de X e X'. Esta situação particular foi assumida na

demonstração da expressão para a transformação de velocidade [equação (B.23)] usada como base para a demonstração das expressões das transformadas de aceleração acima.

7 – O Efeito Doppler da Luz

O efeito Doppler para o som consiste na variação da frequência das ondas emitidas devido ao movimento relativo da fonte emissora e do detector. Vamos considerar dois referenciais inerciais, R e R' , de eixos paralelos e origens coincidentes em $t = t' = 0$ e com R' se movendo em relação a R com velocidade de módulo v , conforme ilustrado na Figura B.4. Consideramos agora, uma fonte sonora em repouso no referencial R' que emite ondas sonoras que se propagam no ar com velocidade de módulo v_s e frequência ν' (observe que o meio em que o som se propaga – o ar – está em repouso no referencial R). Um detector em repouso no referencial R detecta um som de frequência dada por:

$$\nu = \nu' \frac{v_s}{v_s + v} = \frac{\nu'}{1 + \frac{v}{v_s}}. \quad (\text{B.27})$$

Esta é a equação do efeito Doppler do som quando a fonte emissora se afasta do receptor com uma velocidade de módulo v em relação a um referencial fixo no ar e o detector encontra-se em repouso neste referencial.

Vamos agora analisar o que acontece quando substituimos as ondas sonoras por ondas eletromagnéticas, ou por brevidade, por luz. A primeira diferença a ser notada é o fato de ser impossível fixar um referencial no meio em que a onda se propaga, uma vez que este tipo de ondas não necessita de meio para se propagar. Dessa forma, temos somente dois referenciais: um fixo na fonte R' e outro fixo no detector R . Como exemplo de fonte emissora, podemos considerar uma galáxia que se move com velocidade v em relação a um referencial inercial fixo na Terra (o referencial R), e emite luz de frequência ν' medida em R' se propaga com velocidade de módulo c (em qualquer referencial). A frequência detectada em R será ν . Esta situação está ilustrada na Figura B.5.

Considere a emissão de um trem de onda no instante $t = t' = 0$ pelo emissor localizado na origem de R' . No referencial R a frente de onda terá coordenada espacial

$x = 0$, no instante $t = 0$. Já a traseira da onda possui coordenada x' no instante t' medida no referencial R' e coordenadas (x, t) no referencial R .

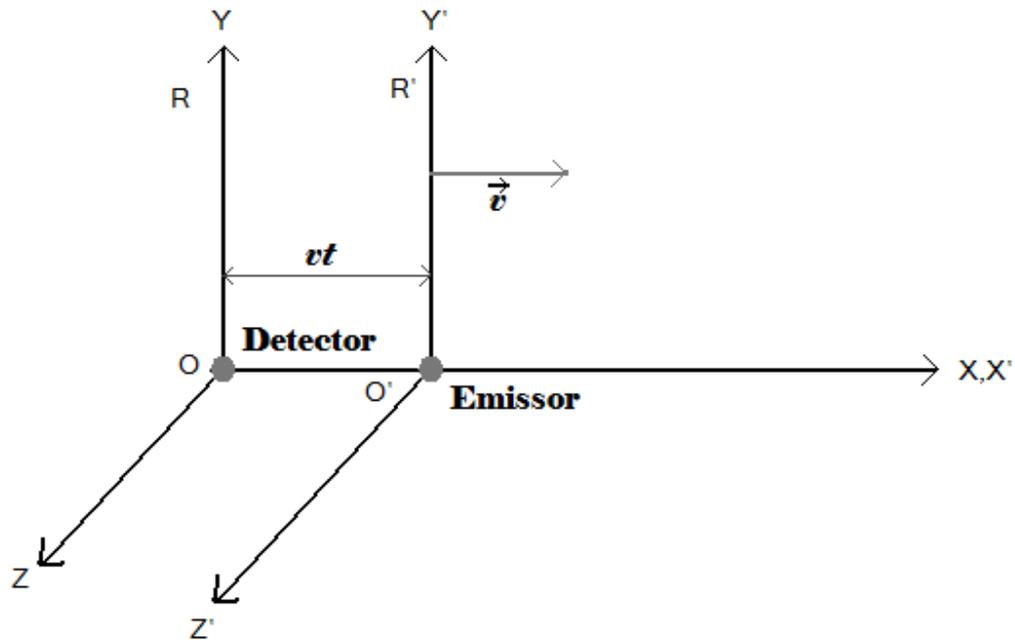


Figura B. 5: Dois referenciais inerciais R e R' de eixos paralelos com origens coincidentes em $t = t' = 0$. R' se move com uma velocidade \vec{v} em relação a R . Uma fonte emissora de ondas eletromagnéticas está localizada na origem do referencial R' no instante de tempo t' e possui coordenadas (x, t) no referencial R que contém um detector de radiação em sua origem.

De acordo com as transformações de Lorentz [equações (B.10)], podemos relacionar as posições e os instantes de tempo nos referenciais R e R' por:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') = \gamma vt' \\ t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}) = \gamma t', \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ [dado pela equação (B.7)] e já substituímos $x' = 0$.

No referencial R , a distância entre a traseira ($x = \gamma vt'$) da onda até o detector (em $x = 0$) é:

$$\Delta x = x - 0 = vt = \gamma vt'$$

e o intervalo de tempo gasto para a luz percorrer esta distância será:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} = \frac{vt}{c} = \frac{\gamma vt'}{c}. \quad (\text{B.29})$$

O tempo medido no referencial R, será a soma entre o instante em que a onda foi emitida e o tempo gasto para percorrer a distância Δx até o detector, ou seja

$$t + \Delta t = \gamma t' \left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad (\text{B.30})$$

onde substituímos o valor de t pela equação (B.28) e de Δt pela equação (B.29). Substituindo o fator γ podemos escrever:

$$t + \Delta t = t' \left[\frac{(1 + \frac{v}{c})}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} \right] = t' \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}. \quad (\text{B.31})$$

Finalmente, interpretando a frente e a traseira como dois nós sucessivos da onda, a equação acima fornece o período desta onda no referencial R. Como a frequência da onda é o inverso de seu período, obtemos:

$$\nu = \frac{1}{t + \Delta t} = \frac{1}{t' \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}},$$

mas $\nu' = \frac{1}{t'}$ é a frequência no referencial R', uma vez que t' é o período da onda medido no referencial R'. Então, a frequência da luz detectada no referencial R se relaciona com a frequência da luz emitida no referencial R' por:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = \nu' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, \quad (\text{B.32})$$

onde $\beta = \frac{v}{c}$. Note que o fator dentro da raiz quadrada da equação do [efeito Doppler relativístico](#)⁴ depende somente da velocidade relativa entre os referenciais inerciais.

Exemplo: A transição entre o terceiro e segundo nível eletrônico do átomo de hidrogênio produz uma linha de emissão centrada em $\lambda' = 6564,6 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) em laboratório. Esta transição é conhecida como $H\alpha$. Observações espectroscópicas de certa galáxia mostram que esta transição é detectada em $\lambda = 7221,0 \text{ \AA}$. Qual é a velocidade de recessão da galáxia?

Solução: Primeiramente supomos que as condições em que esta linha se origina no gás da galáxia sejam semelhantes às condições de laboratório. Dessa forma, em um referencial inercial R', fixo na galáxia, a transição ocorre em $\lambda' = 6564,6 \text{ \AA}$, enquanto que num referencial aqui na Terra detectamos a transição em $\lambda = 7221,0 \text{ \AA}$.

⁴ Veja uma simulação do Efeito Doppler clássico e relativístico neste [link](#).

Substituindo a relação $\nu = c/\lambda$ na equação do efeito Doppler [equação (B.32)] e elevando a equação resultante ao quadrado, obtemos:

$$\frac{c^2}{\lambda^2} = \frac{c^2}{\lambda'^2} \left(\frac{1-v}{1+v/c} \right)$$

Reescrevendo esta equação em termos de v :

$$\lambda'^2 \left(1 + \frac{v}{c} \right) = \lambda^2 \left(1 - \frac{v}{c} \right)$$

$$\lambda'^2 + \lambda'^2 \frac{v}{c} = \lambda^2 - \lambda^2 \frac{v}{c}$$

$$\frac{v}{c} (\lambda'^2 + \lambda^2) = \lambda^2 - \lambda'^2$$

e finalmente

$$v = c \frac{(\lambda^2 - \lambda'^2)}{(\lambda'^2 + \lambda^2)}$$

Substituindo os valores de λ' , λ e c , obtemos $v \approx 28500$ km/s. A galáxia está se afastando da Terra com uma velocidade de 28500 km/s. Observações mostram que a grande maioria das galáxias está se afastando da Terra. Este fenômeno é atribuído a expansão do Universo.

RESUMO DA UNIDADE

Transformações de Posição e Tempo: As transformações de Lorentz para as posições e tempo são:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}). \end{cases}$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$.

Dilatação Temporal: O intervalo de tempo medido por relógios idênticos em dois referenciais inerciais é diferente, sendo que o intervalo de tempo menor (Δt_0) é medido por um relógio em repouso no referencial onde o evento físico aconteceu.

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0.$$

ou seja, o ritmo de dois relógios idênticos não é o mesmo em diferentes referenciais: um relógio em movimento (que mede Δt_0) é mais lento do que um relógio em repouso (que mede Δt). A este fenômeno dá-se o nome de *dilatação temporal*.

Contração de Lorentz: Medidas de distâncias em dois referenciais inerciais resultam em valores diferentes. O comprimento próprio de um dado objeto (L_0) (medido em R') é maior do que o comprimento medido em R (L). A relação entre L_0 e L é:

$$L_0 = \gamma L.$$

Simultaneidade: Dois eventos simultâneos em um dado referencial inercial, não podem ser simultâneos em qualquer outro referencial inercial.

Transformações de Velocidades: As transformações de Lorentz para as velocidades são dadas por:

$$\begin{cases} u'_X = \frac{u_X - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_X} \\ u'_Y = \frac{u_Y}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} u_X)} \\ u'_Z = \frac{u_Z}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} u_X)}. \end{cases}$$

Transformações de Aceleração: As transformações de Lorentz para a aceleração são:

$$a' = \frac{a}{\gamma^3 (1 - \frac{v}{c^2} u)^3}$$

EXERCÍCIOS

1 – Um astronauta abordo de uma nave espacial que se move com uma velocidade de módulo igual a $0,5c$ utiliza uma luneta para observar a explosão de uma estrela supernova após 10h do lançamento. O astronauta estima a distância da estrela como sendo 1 ano-luz na frente da nave, ao longo de uma linha reta que conecta Terra-Nave-Estrela. Defina um referencial inercial na Terra (R) e outro na nave (R') e suponha que estes possuem origens iguais em $t = t' = 0$ e calcule:

- O instante da explosão medido no referencial da Terra. [Resposta: 0,58 anos]
- A distância da estrela em relação à Terra. [Resposta: 1,155 anos-luz]

2 – Uma sonda espacial viajando a $0,9c$ demoraria 540 anos para ir da Terra até o planeta extrasolar CoRoT-7b⁵, de acordo com medidas em um relógio terrestre. Qual seria o tempo medido por um relógio dentro da sonda? Considere que a sonda mantém sua velocidade constante durante todo o percurso. [Resposta: 235,4 anos]

3 – Uma nave espacial, viajando com uma velocidade de módulo $0,43c$, demora 10 anos para ir até a estrela Próxima Centauri e mais 10 anos para retornar a Terra, de acordo com medidas em um relógio na Terra. Qual é o tempo total de viagem medido por um relógio dentro da nave? Ignore a variação de velocidade no início e final de cada viagem. [Resposta: 18 anos]

4 – Uma nave espacial viaja com uma velocidade de módulo $0,7c$ em missão ao planeta X. Após um intervalo de 20 horas a partir do lançamento (medido em um relógio na nave), um astronauta se comunica com a Terra via rádio. Quanto tempo após o lançamento este sinal é detectado? Considere os referenciais inerciais fixos na Terra e na nave como tendo origens iguais em $t = t' = 0$. [Resposta: 47, 6 h]

⁵ O planeta CoRoT-7b é o planeta fora do sistema solar mais parecido com a Terra (entre os planetas descobertos até o momento) e está localizado a uma distância de aproximadamente 490 anos-luz da Terra. Até o momento foram descobertos aproximadamente 500 [planetas extrasolares](#).

5 – Uma régua a bordo de uma nave espacial viajando com velocidade de módulo $0,5c$ possui um metro de comprimento, medido em um referencial inercial fixo na nave. Qual é o tamanho da régua medido em um referencial inercial na Terra, se

a) a régua está paralela a linha que conecta a Terra a nave; [Resposta: 86,6 cm]

b) a régua está perpendicular a linha que conecta a Terra a nave. [Resposta: 1m]

6 – Certa galáxia se afasta da Terra com uma velocidade de $0,4c$. Se um fóton é emitido com comprimento de onda $\lambda' = 5000\text{Å}$, qual é o comprimento de onda detectado aqui na Terra? [Resposta: $\lambda \approx 11667\text{Å}$].

Unidade C: Momento e Energia

1 – Momento Relativístico

A conservação do momento linear (ou simplesmente momento) é um princípio bem estabelecido na mecânica Newtoniana. Por exemplo, em uma colisão entre duas partículas, podemos facilmente mostrar que $p_f = p_i$ em todos os referenciais inerciais, se as velocidades das partículas em diferentes referenciais inerciais estão relacionadas pelas transformadas de Galileu.

Na mecânica clássica, o momento de uma partícula é definido como $\vec{p} = m\vec{u}$, onde m é a massa da partícula e \vec{u} é sua velocidade num dado referencial inercial. Vamos utilizar esta definição para verificar se o momento se conserva quando as velocidades das partículas em diferentes referenciais inerciais estão relacionadas pelas transformações de Lorentz ao invés das transformações clássicas de Galileu. Para isso, vamos considerar a situação ilustrada na Figura C.1. Dois referenciais inerciais com eixos paralelos, como R' se movendo com velocidade \vec{v} na direção e sentido de X e X'. Vamos considerar uma colisão entre duas partículas, A e B, com massas iguais, sendo que a partícula A possui velocidade paralela ao eixo Y e com módulo u no referencial R, enquanto que a partícula B possui um valor de velocidade $-u$ paralelamente ao eixo Y' no referencial R'. A variação do módulo do momento total no referencial R na direção Y é dada por

$$\Delta p_Y = \Delta p_{A,Y} + \Delta p_{B,Y} \quad (\text{C.1})$$

De acordo com o princípio da conservação do momento linear esta variação deve ser nula. Na direção X a componente da velocidade da partícula A no referencial R é nula e conseqüentemente a componente do momento linear nesta direção, antes e depois da colisão, também é nulo.

Se colisão entre as partículas for perfeitamente elástica, o módulo da velocidade da partícula A após a colisão terá o mesmo valor u , porém esta velocidade está no sentido $-Y$ no referencial R, sentido contrário a velocidade da partícula A depois da colisão. Usando a definição de momento da mecânica newtoniana, a variação do momento da partícula A no referencial R, na direção Y, é dado por:

$$\Delta p_{A,Y} = mu - m(-u) = 2mu. \quad (\text{C.2})$$

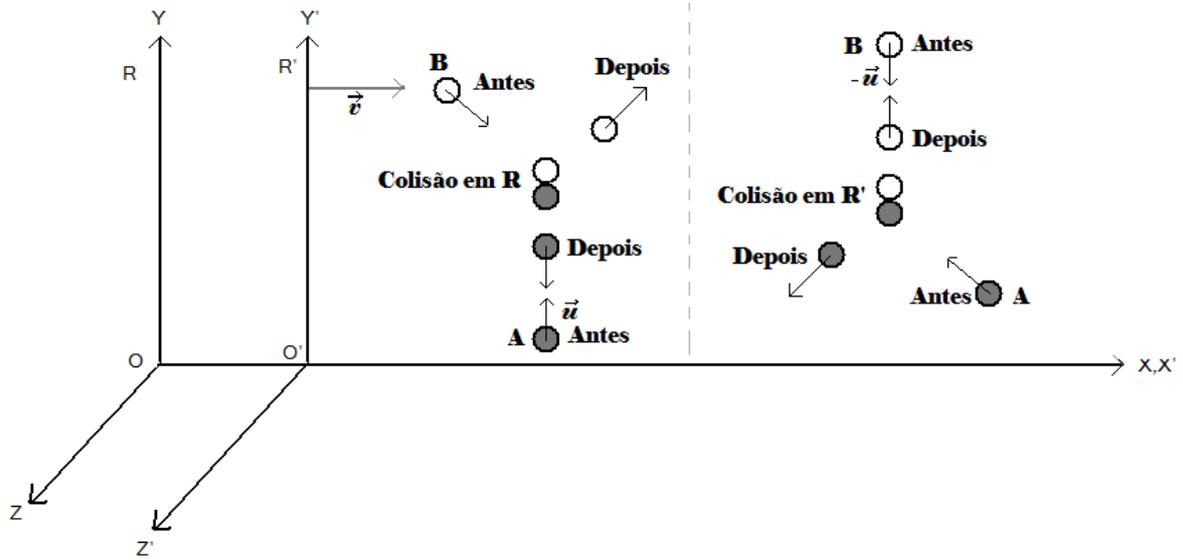


Figura C.1: Colisão entre duas partículas, A e B, nos referenciais inerciais R e R', os quais possuem eixos paralelos e R' se move com velocidade \vec{v} em relação a R. As posições das partículas e suas velocidades são mostradas nas situações anterior e posterior a colisão.

Vamos agora analisar a variação do momento da partícula B no referencial R. No referencial R', a partícula B possui componentes de velocidades $u'_{B,X} = 0$ e $u'_{B,Y} = -u$. As componentes da velocidade da partícula B ao longo dos eixos X e Y no referencial R podem ser obtidas usando as transformações de Lorentz para a velocidade [equações (B.21)], da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_{B,X} = \frac{u'_{B,X} + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_{B,X}} = v \\ u_{B,Y} = \frac{u'_{B,Y}}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2} u'_{B,X})} = -\frac{u}{\gamma} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Dessa forma, a variação do momento da partícula B ao longo do eixo X no referencial R será:

$$\Delta p_{B,Y} = m\left(-\frac{u}{\gamma}\right) - m\left(\frac{u}{\gamma}\right) = -2m\frac{u}{\gamma}. \quad (\text{C.4})$$

Substituindo as equações (C.4) e (C.2) na equação (C.1) obtemos:

$$\Delta p_Y = 2mu\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right). \quad (\text{C.5})$$

A equação (C.5) nos mostra que $\Delta p_Y \neq 0$, ou seja, o momento não se conserva no referencial R quando usamos sua definição clássica juntamente com as transformações de Lorentz para a velocidade. Entretanto no limite de baixas

velocidades, $\gamma \rightarrow 1$ e conseqüentemente $\Delta p_Y \rightarrow 0$. Podemos demonstrar de maneira análoga que a variação do momento na componente X em R também possui valor diferente de zero e ainda que o momento no referencial R' também não se conserva. Deixamos isso como um exercício para o leitor.

O problema da não conservação do momento pode ser solucionado de duas formas distintas: (1) Dizendo que o princípio da conservação do momento não é de fato um princípio geral, não sendo válido para altas velocidades e (2) o princípio da conservação do momento é sempre válida, porém a expressão $\vec{p} = m\vec{v}$ deve ser modificada para altas velocidades. A teoria da relatividade especial aceita como verdadeiro o princípio da conservação do momento e portanto a segunda opção deve ser escolhida. A nova definição para o momento deve satisfazer as seguintes condições:

- O momento relativístico deve ser conservado nas colisões em qualquer referencial inercial;
- Para baixas velocidades, $\vec{p} \rightarrow m\vec{u}$ como requerido pelas leis da mecânica newtoniana.

Para encontrar uma expressão para o momento relativístico, vamos considerar o movimento de uma partícula ao longo do eixo Y' no referencial R', como por exemplo, a partícula B da Figura C.1. Supondo que esta partícula se mova uma distância Δy em um intervalo de tempo $\Delta t'$ neste referencial. O valor de Δy é o mesmo nos referenciais R e R' pois o movimento de R' em relação a R ocorre ao longo do eixo X [ver equações (B.9)], porém o intervalo de tempo é diferente em diferentes referenciais inerciais, ou seja, não é invariante sob a teoria da relatividade especial. De acordo com a definição clássica para o momento, temos $p_Y = m \frac{\Delta y}{\Delta t'}$, entretanto como o intervalo de tempo $\Delta t'$ não é invariante sob a teoria da relatividade especial, vamos substituir $\Delta t'$ pelo intervalo de tempo próprio Δt_0 , medido em relação a um referencial fixo na partícula, dado pela expressão (B.12), reescrita abaixo:

$$\Delta t_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \Delta t'$$

Substituindo Δt_0 , a expressão para p_Y fica:

$$p_Y = m \frac{\Delta y}{\Delta t_0} = m \frac{\Delta y}{\Delta t'} \frac{\Delta t'}{\Delta t_0} = p_Y = m u_Y \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \Delta t'}$$

Então,

$$p_Y = \frac{mu_Y}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$$

e conseqüentemente o vetor momento relativístico fica

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \quad (\text{C.6})$$

Podemos facilmente notar que a segunda condição destacada acima é satisfeita, uma vez que quando $u \ll c$, o denominador da equação (C.6) tende a um e conseqüentemente $\vec{p} \rightarrow m\vec{u}$. Vamos agora verificar se a equação do momento relativístico satisfaz a primeira condição, listada acima, considerando a situação da ilustrada na Figura C.1. A variação do momento para a partícula A ao longo de Y no referencial R agora assume a seguinte forma:

$$\Delta p_{A,Y} = \frac{mu}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} - \frac{m(-u)}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} = \frac{2mu}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}. \quad (\text{C.7})$$

Para a partícula B podemos escrever:

$$\Delta p_{B,Y} = \frac{m(-\frac{u}{\gamma})}{\sqrt{1-(\frac{u_B}{c})^2}} - \frac{m(\frac{u}{\gamma})}{\sqrt{1-(\frac{u_B}{c})^2}} = -\frac{2m}{\gamma} \frac{u}{\sqrt{1-\frac{u_B^2}{c^2}}}, \quad (\text{C.8})$$

O termo dentro da raiz quadrada é dado por:

$$1 - \frac{u_B^2}{c^2} = 1 - \frac{(u_{B,X}^2 + u_{B,Y}^2)}{c^2} = (1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u^2}{\gamma^2 c^2}) = \frac{1}{\gamma} [1 - (\frac{u}{c})^2],$$

onde usamos as equações (C.3) e a definição do fator γ [equação (B.7)]. Substituindo este termo na equação (C.8), obtemos:

$$\Delta p_{B,Y} = -\frac{2mu}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}. \quad (\text{C.9})$$

A variação do momento total ao longo do eixo Y no referencial R será $\Delta p_Y = \Delta p_{A,Y} + \Delta p_{B,Y} = 0$. Este resultado nos diz que o momento total da colisão ao longo do eixo Y no referencial R é conservado. Este resultado também é obtido quando analisamos a componente X do momento relativístico no referencial R, bem como quando analisamos a variação do momento no referencial R'. Deixamos estas demonstrações como exercício, as quais podem ser feitas de maneira análoga a apresentada aqui.

2 – Massa

No limite de baixas velocidades, onde $\frac{u}{c} \rightarrow 0$, a expressão para o momento relativístico de uma partícula se aproxima do valor clássico, ou seja, $\vec{p} \rightarrow m\vec{u}$. Neste caso, o símbolo m representa a massa da partícula e possui o mesmo valor na teoria da relatividade especial e na mecânica clássica. No limite de baixas velocidades, $u \rightarrow 0$ uma vez que c é uma constante. Neste caso, m representa a massa da partícula medida no referencial inercial em que a partícula encontra-se em repouso e é comumente chamada de massa de repouso, m_0 , analogamente a definição de intervalo de tempo próprio Δt_0 e comprimento próprio L_0 , discutidos na unidade anterior.

Alguns autores apresentam o momento relativístico escrito da forma $\vec{p} = m_R\vec{u}$, onde m_R é conhecida como a massa relativística e é expressa por

$$m_R = \frac{m}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}},$$

obtida diretamente da comparação das expressões para o momento clássico e relativístico. Entretanto esta expressão mostra que a massa relativística aumenta com o aumento da velocidade da partícula, ou seja, a massa relativística é diferente em diferentes referenciais inerciais.

O termo massa relativística vem sendo abandonado na literatura científica recente, uma vez que introduz a idéia de que a massa de uma partícula ou objeto depende da velocidade com que este se movimenta. Neste texto, **não adotaremos** o termo massa relativística para evitar confusão. O símbolo m sempre representará a massa da partícula ou objeto, a qual possui o mesmo valor em qualquer referencial inercial e representa a mesma grandeza da mecânica clássica. Em outras palavras, a massa de uma partícula é um invariante relativístico.

3 – A Velocidade Limite

Na mecânica clássica, a velocidade de uma partícula pode assumir qualquer valor, ou seja, não existe um limite de velocidade. Entretanto na teoria da relatividade especial, podemos mostrar que o módulo da velocidade de qualquer objeto não pode exceder o valor da velocidade da luz no vácuo.

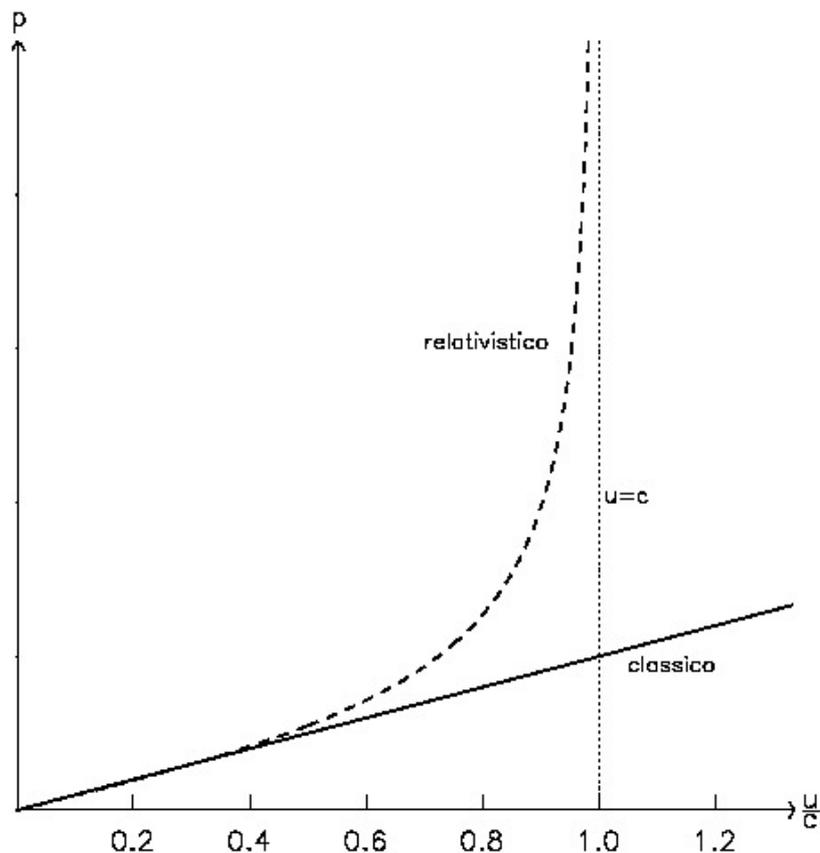


Figura C.2: Gráfico p versus $\frac{u}{c}$ para o momento relativístico (curva tracejada) e clássico (curva contínua). A linha pontilhada na vertical representa $u = c$.

Para verificar esta informação apresentamos na Figura C.2, um gráfico do momento linear *versus* a velocidade. A curva contínua representa a expressão clássica para o momento, $p = mu$, e mostra que este varia linearmente com a velocidade. A variação do momento relativístico, dado pela equação (C.6), com a velocidade está representada pela curva tracejada. Podemos observar que em valores baixos de velocidade ($u \ll c$) o valor momento relativístico se aproxima do valor do momento clássico. Entretanto, para velocidades maiores, as duas curvas apresentam comportamentos distintos. Quando $u \rightarrow c$, observamos que $p \rightarrow \infty$ para o momento relativístico. Este resultado pode ser interpretado da seguinte forma: nenhuma partícula ou objeto material pode se deslocar com módulo de velocidade maior do que o módulo

da velocidade da luz no vácuo c . Dessa forma c representa a **velocidade limite** de qualquer objeto material.

Podemos chegar a esta mesma conclusão analisando o conceito de força na teoria da relatividade especial, como mostramos a seguir.

4 – Força e Aceleração

Mostramos anteriormente que o momento clássico $\vec{p} = m\vec{v}$ é uma grandeza que não se conserva no caso de colisões com velocidades relativísticas. Isto implica que a expressão matemática da segunda lei de Newton, dada por $\vec{F} = m\vec{a}$, também não pode estar correta na teoria da relatividade, uma vez que conduziria a uma conservação do momento clássico em colisões relativísticas – o que não acontece. Entretanto a expressão matemática da segunda lei de Newton na mecânica clássica pode ser escrita em termos do momento, como se segue:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Uma vez que já encontramos uma expressão relativística para o momento [equação (C.6)], podemos tentar usá-la, juntamente com a equação acima, para encontrar uma expressão para a força na teoria da relatividade especial. Tomando a diferencial da equação (C.6), obtemos:

$$d\vec{p} = \frac{md\vec{u}[1-(\frac{u}{c})^2]^{-\frac{1}{2}} - m\vec{u}.0}{[1-(\frac{u}{c})^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{md\vec{u}}{[1-(\frac{u}{c})^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (C.10)$$

Note que utilizamos novamente a regra do quociente para derivar e como o termo u que aparece no denominador é o módulo da velocidade da partícula (que é considerado constante), a diferencial do denominador é nula. Considerando um movimento unidimensional, ou seja, a força e a velocidade da partícula estão na mesma direção, podemos escrever a equação da força em termo dos módulos da seguinte forma:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{m}{[1-(\frac{u}{c})^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{dt}. \quad (C.11)$$

Como o módulo da aceleração da partícula pode ser dado por $a = \frac{du}{dt}$, obtemos

$$F = \frac{ma}{[1-(\frac{u}{c})^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (C.12)$$

Esta é a equação para o módulo da **força relativística** sobre uma partícula de massa m com aceleração a , quando a força e a velocidade da partícula possuem o mesmo sentido. Esta expressão nos mostra que, sendo m uma constante, quando $u \rightarrow 0$, $F \rightarrow ma$, recuperando assim a expressão clássica da força, como esperado. Por outro lado sendo m e F constantes e $u \rightarrow c$, obtém-se $a \rightarrow 0$, independente do valor da força. Esta última conclusão pode ser interpretada em termos do limite “cósmico” c para o módulo da velocidade de uma partícula, uma vez que o módulo da aceleração produzida numa partícula por uma força de módulo constante tende a zero quando o módulo da velocidade da partícula se aproxima de c . Isto implica que o valor máximo para a velocidade de uma partícula corresponde ao módulo da velocidade da luz no vácuo.

EXEMPLO: Considere uma partícula de massa m que se move com velocidade de módulo igual à metade do módulo da velocidade da luz. Qual é a razão entre o momento relativístico e o momento clássico?

Solução: Os módulos do momento relativístico (p_r) e clássico (p_c) da partícula são dados por:

$$p_r = \frac{mu}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$$

e

$$p_c = mu,$$

onde m é a massa da partícula e u é o módulo de sua velocidade. A razão $\frac{p_r}{p_c}$ será

$$\frac{p_r}{p_c} = \frac{\frac{mu}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}}{mu} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}.$$

Note que esta razão independe da massa da partícula. Este resultado era esperado, uma vez que a massa de uma partícula possui o mesmo valor tanto na mecânica clássica quanto na teoria da relatividade. Substituindo $u = 0,5c$ dado no enunciado do exercício, obtemos:

$$\frac{p_r}{p_c} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{0,5c}{c})^2}} \approx 1.15$$

Este resultado nos mostra que o uso da equação clássica para calcular o momento de uma partícula que se move com velocidade de módulo $0,5c$ resultaria em um momento

15% menor do que o valor real. Para partículas que se movem com velocidades maiores este erro aumenta rapidamente. Por exemplo, se $v = 0.9c$, obtém-se $\frac{p_r}{p_c} \approx 2.3$ e o uso da equação clássica para o momento resulta em um erro maior do que 100% no valor do momento da partícula.

5 – Energia total de uma Partícula Livre

O princípio de conservação de energia é um princípio fundamental assim como o princípio de conservação do momento. Assim com o momento relativístico, a energia relativística deve satisfazer as seguintes condições:

- A energia total deve ser conservada em qualquer sistema isolado;
- Para baixas velocidades ($\frac{u}{c} \rightarrow 0$) a energia relativística deve tender ao valor clássico.

Vamos começar procurando uma expressão para a energia cinética relativística. O teorema trabalho-energia cinética, que diz que o trabalho de uma força sobre uma partícula é igual à variação da energia cinética da mesma. Vamos considerar o movimento unidimensional de uma partícula, que parte do repouso da posição x_1 , e se desloca até a posição x_2 onde possui velocidade u . O trabalho realizado para acelerar uma partícula desde o repouso até u é dado por:

$$W = E_c = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

Substituindo $F = \frac{dp}{dt}$ e escrevendo a integral em termos da velocidade da partícula, obtemos:

$$E_c = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx = \int_0^u \frac{dp}{du} \frac{dx}{dt} du = \int_0^u \frac{dp}{du} u du. \quad (\text{C.13})$$

Agora, calculando o termo $\frac{dp}{du}$,

$$\frac{dp}{du} = \frac{d\left(\frac{mu}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}\right)}{du} = \frac{mdu[1-(\frac{u}{c})^2]^{1/2}}{1-(\frac{u}{c})^2} = \frac{m}{[1-(\frac{u}{c})^2]^{3/2}} \frac{du}{du} = \frac{m}{[1-(\frac{u}{c})^2]^{3/2}}.$$

Substituindo este termo na equação (C.13) e calculando a integral encontramos a energia cinética da partícula

$$E_c = \int_0^v \frac{mu}{[1-(\frac{u}{c})^2]^{3/2}} du = \left[mc^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^v$$

$$E_c = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - 1 \right) \quad (\text{C.14})$$

Esta expressão é a definição da **energia cinética relativística** de uma partícula de massa m e velocidade de módulo u .

Vamos verificar se a expressão para a energia cinética relativística se reduz a equação clássica no limite de baixas velocidades. Para tal vamos expandir o termo $[1 - (\frac{u}{c})^2]^{-1/2}$ em torno de $(\frac{u}{c})^2$ através de uma expansão binomial⁶ da seguinte forma:

$$[1 - (\frac{u}{c})^2]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(\frac{u}{c})^2 + \frac{3}{8}(\frac{u}{c})^4 + \dots$$

No limite de baixas velocidades, $\frac{u}{c} \rightarrow 0$, podemos truncar esta expansão no segundo termo e a expressão para a energia cinética resulta em:

$$E_c \approx mc^2[1 + \frac{1}{2}(\frac{u}{c})^2 - 1] = \frac{mc^2}{2} (\frac{u}{c})^2 = \frac{1}{2}mu^2.$$

Dessa forma, a expressão para a energia cinética na teoria da relatividade especial recupera a forma clássica no limite de baixas velocidades.

Neste ponto é importante notar que o primeiro termo da expressão para a energia cinética relativística [equação (C.14)], $\frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$, depende da velocidade da partícula u , enquanto que o segundo termo, mc^2 , independe da velocidade da partícula. A grandeza mc^2 é chamada de energia de repouso da partícula livre.

A **energia relativística total** da partícula livre é definida por:

$$E = mc^2 + E_c = mc^2 + \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} - mc^2$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \tag{C.15}$$

Esta equação nos diz que a energia de uma partícula livre sempre é uma grandeza positiva não nula. Seu valor mínimo corresponde à situação em que a partícula está em repouso em relação a um dado referencial, ou seja, $u = 0$, quando a energia total vale $E = mc^2$. Comumente se expressa esta energia como

$$E_0 = mc^2 \tag{C.16}$$

Esta equação representa a **energia de repouso** da partícula livre, como definido acima.

⁶ A expansão binomial em potências de x do termo $(1+x)^n$ pode ser expressa por: $(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2/2 + n(n-1)(n-2)x^3/6 + \dots$

A equação para a energia total relativística satisfaz o princípio da conservação da energia. Esta afirmação pode ser verificada experimentalmente, por exemplo, através do estudo de colisões entre partículas ou da desintegração nuclear.

As equações apresentadas nesta seção foram obtidas para uma partícula livre, porém elas também são válidas para um corpo livre, constituído de um número qualquer de partículas. Entretanto, é importante notar que na teoria da relatividade a massa total de um corpo qualquer é diferente da soma das massas das partículas que o constituem. Isso fica mais claro, quando pensamos em termos da energia de repouso de um corpo livre, que pode ser dada pela equação (C.16). A energia de um corpo livre é dada pela soma das energias de repouso das partículas que o constituem, das energias cinéticas destas partículas e das energias potenciais associadas às interações mútuas das partículas, ou seja, $mc^2 \neq \sum_{i=1}^N m_i c^2$, onde m é a massa total do corpo e m_i é a massa das partículas que o constituem. Como c é constante, obtemos que $m \neq \sum_{i=1}^N m_i$, ou seja, a massa total do corpo é diferente da soma das massas das partículas que o constituem.

6 – Relação Massa-Energia

A equação para a energia de repouso de um corpo livre [equação (C.16)] é conhecida como a equação de Einstein e sugere que a massa inercial de um corpo e sua energia de repouso são grandezas intimamente ligadas. Einstein sugeriu que esta equação poderia ser comprovada experimentalmente utilizando-se elementos radioativos, os quais possuem conteúdo de energia variável.

Vamos supor que um dado elemento emita uma quantidade de energia E na forma de radiação eletromagnética, de acordo com a equação (C.16) sua massa diminui por um fator $\frac{E}{c^2}$ e a radiação eletromagnética transporta inércia para outros corpos. O termo $\frac{E}{c^2}$ expressa a **inércia da radiação eletromagnética**.

O princípio da conservação da energia total pode ser comprovado experimentalmente para processos relativísticos, como dito na seção anterior. Entretanto, outro princípio de conservação – o princípio de conservação da massa – não deve ser tratado de maneira isolada na teoria da relatividade especial, devido a relação entre a massa e a energia, discutida acima. A relação [massa-energia](#) implica

na substituição das leis de conservação de massa e de energia por uma única lei de conservação de massa-energia, na qual a quantidade que se conserva é $mc^2 + E_c$.

7 – Relação Energia-Momento

Em algumas situações é conveniente expressar a energia total em termos do momento da partícula. As equações para a energia total relativística [equação (C.15)] e para o momento relativístico [equação (C.6)] são transcritas abaixo

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$$

e

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}.$$

Elevando ao quadrado estas duas equações, obtemos:

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1-(\frac{u}{c})^2} = \frac{m^2c^6}{c^2-u^2}$$

e

$$p^2 = \frac{m^2u^2}{1-(\frac{u}{c})^2} = \frac{m^2c^2u^2}{c^2-u^2}.$$

Multiplicando a segunda equação por c^2 e subtraindo-a da primeira, da seguinte forma:

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m^2c^6}{c^2-u^2} - \frac{m^2c^4u^2}{c^2-u^2} = \frac{m^2c^4}{(c^2-u^2)}(c^2 - u^2) = m^2c^4.$$

Finalmente, reorganizando os termos desta equação, obtemos a seguinte relação:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{C.17}$$

Esta expressão é válida tanto para partículas livres quanto para corpos livres.

No caso de uma partícula com massa nula, como por exemplo um fóton, o segundo termo do lado direito da equação (C.17) vale zero e, conseqüentemente esta equação nos fornece:

$$E = pc \tag{C.18}$$

Por outro lado, no referencial em que a partícula encontra-se em repouso, ou seja, $u = 0$, a equação (C.17) assume a forma da expressão da energia de repouso da partícula livre, $E = mc^2$.

As equações do momento relativístico e da energia total [equações (C.6) e (C.15)] mostram que estas grandezas podem ser não nulas somente se $m \rightarrow 0$ na mesma proporção em que $u \rightarrow c$, ou seja, mantendo o termo $\frac{m}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$ constante. Em

outras palavras, partículas com massa nula necessariamente se movimentam com velocidades de módulo igual ao módulo c da velocidade da luz no vácuo. A existência de tais partículas é amplamente comprovada experimentalmente e como exemplo citamos os fótons, que são partículas associadas a radiação eletromagnética.

8 - O Efeito Compton

Como um exemplo da aplicação das equações apresentadas nesta unidade vamos demonstrar a equação do efeito Compton. Este efeito foi proposto pelo físico americano [Arthur H. Compton](#) (1892-1962) em 1922 a partir do estudo do espalhamento de raios X pela matéria, observando que o comprimento de onda da radiação espalhada está relacionado com o comprimento de onda da radiação incidente e independe do material do alvo, sobre o qual a radiação incide. Estudos teóricos e experimentais de Compton mostraram que este tipo de espalhamento resulta da colisão de fótons com os elétrons livres do alvo. Em resumo, o efeito Compton é a variação do comprimento de onda da radiação eletromagnética espalhada por elétrons livres.

Para discutir o efeito Compton, vamos considerar a radiação eletromagnética como um conjunto de partículas (os fótons), com energia $E = h\nu$, onde h é a constante de Planck e ν é a frequência da radiação eletromagnética. Consideramos um feixe de raios X de comprimento de onda λ_1 que incide sobre um elétron em um referencial em que este elétron encontra-se em repouso antes da colisão. Em relação a este referencial a radiação espalhada possui um comprimento de onda λ_2 . Esta situação está ilustrada na Figura C.3. Após a colisão, o fóton é difratado com um ângulo α e o elétron sai com um ângulo θ em relação à linha que conecta o fóton incidente e o elétron antes da colisão. O momento do fóton incidente p_1 e difratado p_2 são:

$$p_1 = \frac{E_1}{c} = \frac{h\nu_1}{c} = \frac{h}{\lambda_1} \quad (\text{C.19})$$

e

$$p_2 = \frac{E_2}{c} = \frac{h\nu_2}{c} = \frac{h}{\lambda_2}, \quad (\text{C.20})$$

respectivamente. Para obter estas equações a relação $\lambda\nu = c$ foi utilizada.

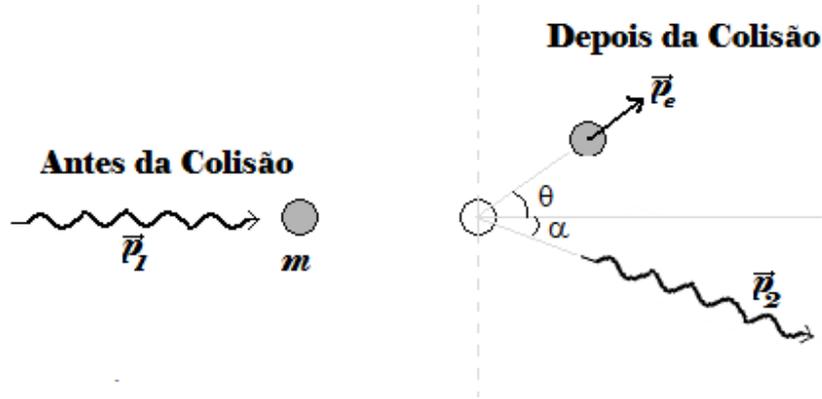


Figura C.3: Representação esquemática do efeito Compton. Um fóton com momento \vec{p}_1 incide em um elétron livre de massa m . O fóton espalhado possui \vec{p}_2 e o elétron assume momento p_e .

De acordo com o princípio de conservação do momento, o momento do sistema fóton-elétron antes da colisão deve ser igual ao momento após a colisão, ou seja

$$\vec{p}_{\text{antes}} = \vec{p}_{\text{depois}}$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e.$$

Reescrevendo esta equação da seguinte forma:

$$\vec{p}_e = \vec{p}_1 - \vec{p}_2.$$

Agora, elevando os dois lados da equação acima ao quadrado (lembrando que os vetores \vec{p}_1 e \vec{p}_2 não possuem a mesma direção) obtemos:

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos(\alpha). \quad (\text{C.21})$$

A lei de conservação de energia implica em:

$$E_{\text{antes}} = E_{\text{depois}}$$

$$p_1c + mc^2 = p_2c + \sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4}, \quad (\text{C.22})$$

onde a energia do fóton é dada pela relação (C.18), uma vez que o fóton é uma partícula de massa nula. Antes da colisão, a energia do elétron sua energia de repouso [equação (C.16)] e após a colisão a energia do elétron é dada pela equação (C.17). Passando p_2c para o lado esquerdo da equação e elevando os dois lados da equação resultante ao quadrado, obtemos:

$$(p_1c + mc^2 - p_2c)^2 = (\sqrt{p_e^2c^2 + m^2c^4})^2$$

$$p_1^2c^2 + 2p_1mc^3 - 2p_1p_2c^2 + m^2c^4 - 2p_2mc^3 + p_2^2c^2 = p_e^2c^2 + m^2c^4,$$

reescrevendo esta equação, temos:

$$p_1^2 c^2 + p_2^2 c^2 + 2p_1 m c^3 - 2p_1 p_2 c^2 - 2p_2 m c^3 = p_e^2 c^2$$

e dividindo toda a equação por c^2 , obtemos

$$p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 m c - 2p_1 p_2 - 2p_2 m c = p_e^2.$$

Substituindo a p_e^2 pela equação (C.21), obtemos:

$$p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 m c - 2p_1 p_2 - 2p_2 m c = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(\alpha).$$

Re-organizando os termos da equação acima e dividindo o resultado por dois, encontramos:

$$p_1 m c - p_1 p_2 - p_2 m c = -p_1 p_2 \cos(\alpha),$$

Re-organizando o resultado da seguinte forma

$$p_1 - p_2 = \frac{p_1 p_2}{m c} [1 - \cos(\alpha)]$$

e substituindo $p_1 = \frac{h}{\lambda_1}$ e $p_2 = \frac{h}{\lambda_2}$, dados pelas equações (C.19) e (C.20), respectivamente, obtemos:

$$\frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2} = \frac{h^2}{\lambda_1 \lambda_2 m c} [1 - \cos(\alpha)].$$

Multiplicando os dois lados desta equação por $\frac{\lambda_1 \lambda_2}{h}$, obtemos a diferença entre os comprimentos de onda dos fótons espalhado λ_2 e incidente λ_1 , dada por

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m c} [1 - \cos(\alpha)]. \quad (\text{C.23})$$

Esta é a equação para o efeito Compton que nos fornece a relação entre os comprimentos da radiação eletromagnética que incide sobre o elétron livre e o comprimento de onda radiação que é espalhada por ele.

RESUMO DA UNIDADE

Momento Relativístico: Na teoria da relatividade o momento de uma partícula é expresso por

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$$

onde m é a massa da partícula e \vec{u} sua velocidade. Esta equação nos diz que nenhuma partícula ou objeto pode se deslocar com módulo de velocidade maior do que o módulo da velocidade da luz no vácuo, uma vez que quando $v \rightarrow c$, $p \rightarrow \infty$. Dessa forma, c representa a *velocidade limite* de qualquer objeto material.

Energia Relativística: A energia cinética relativística de uma partícula livre (ou corpo) é expressa por

$$E_c = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} - 1 \right) \text{ e sua energia de repouso vale } E_0 = mc^2. \text{ A energia total}$$

relativística, que é a soma destas duas quantidades, é dada por:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$$

Relação Energia-Momento: As expressões do momento e energia relativística mostram que partículas com massa nula necessariamente se movimentam com velocidades de módulo igual ao módulo c da velocidade da luz no vácuo. O momento relativístico e a energia relativística se relacionam através da seguinte expressão:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Efeito Compton: É a variação do comprimento de onda da radiação eletromagnética espalhada por elétrons livres.

EXERCÍCIOS

1 – Considere um elétron livre se movendo com velocidade de módulo $0,7c$ e calcule:

- A razão entre os módulos do momento relativístico e clássico; [Resposta: 1,4]
- A razão entre a energia cinética relativística e clássica. [Resposta: 1,63]

2 – Calcule a velocidade de uma partícula, cuja razão entre o módulo do momento dado pela expressão relativística e o momento dado pela expressão clássica é 1.2. [Resposta: $0,55c$]

3 – Calcule a velocidade de uma partícula para qual módulo do momento clássico é 9% menor do que o módulo do momento relativístico. [Resposta: $0,41c$]

4 – Qual é a velocidade de uma partícula que possui energia total igual ao dobro de sua energia de repouso? [Resposta: $0,87c$]

5 – Calcule o módulo da velocidade e do momento de uma partícula de massa $2 \text{ MeV}/c^2$ e energia cinética de 3 MeV ⁷. [Respostas: $u=0,92c$; $p=4,7 \text{ MeV}/c$]

6 – Considere o efeito Compton: Experimentalmente, observa-se que o comprimento de onda da radiação incidente λ_1 sofre um aumento de 2% quando o ângulo de difração é $\alpha = 60^\circ$. Quais são os comprimentos de onda dos fótons incidentes e difratados (λ_2)? Dados: $h=6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$; $m=9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$; $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$. [Respostas: $6,07 \times 10^{-11} \text{ m}$; $6,19 \times 10^{-11} \text{ m}$]

⁷ Um elétron volt (eV) equivale $1,6 \times 10^{-19}$ Joules.

Unidade D: Processos de Alta Energia

1 – Transformações de Energia e Momento

Nesta seção discutiremos como as expressões relativísticas para a energia e momento se modificam de um referencial inercial para outro. Para isso vamos considerar a situação ilustrada na Figura D.1, que mostra uma partícula de massa m movendo-se com velocidade \vec{u}' em relação ao referencial inercial R' , que por sua vez se move paralelamente ao eixo X do referencial R com velocidade \vec{v} . No referencial R , a velocidade da partícula vale \vec{u} .

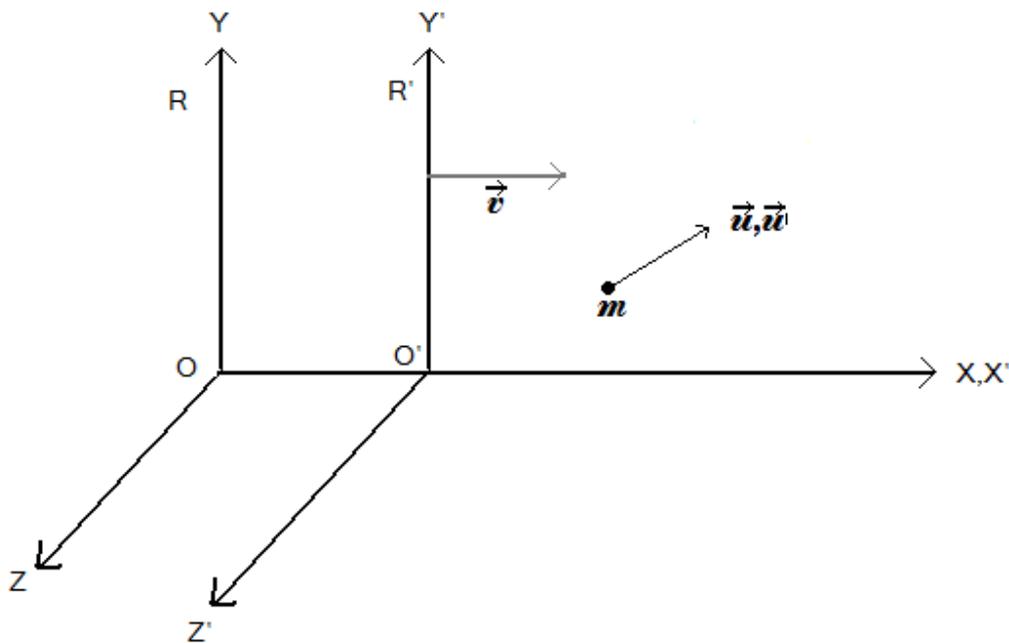


Figura D.1: Dois referenciais inerciais de eixos paralelos com R' se movendo com velocidade \vec{v} em relação a R . Uma partícula de massa m se move com velocidade \vec{u} em relação ao referencial R e \vec{u}' em relação a R' .

A energia total relativística e as componentes do momento relativístico no referencial R , dadas pelas equações (C.15) e (C.6), respectivamente, valem:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \quad (D.1)$$

$$p_X = \frac{mu_X}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \quad (D.2)$$

$$p_Y = \frac{mu_Y}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \quad (D.3)$$

$$p_Z = \frac{mu_Z}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \quad (D.4)$$

e no referencial R', temos:

$$E' = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{u'}{c})^2}} \quad (D.5)$$

$$p'_X = \frac{mu'_X}{\sqrt{1-(\frac{u'}{c})^2}} \quad (D.6)$$

$$p'_Y = \frac{mu'_Y}{\sqrt{1-(\frac{u'}{c})^2}} \quad (D.7)$$

$$p'_Z = \frac{mu'_Z}{\sqrt{1-(\frac{u'}{c})^2}}. \quad (D.8)$$

Substituindo as transformações de Lorentz para as velocidades [equações (B.20)] pode-se mostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u'}{c})^2}} = \gamma \frac{(1-\frac{vu_X}{c^2})}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}. \quad (D.9)$$

Substituindo esta equação na equação (D.5) obtemos

$$E' = \gamma \frac{(1-\frac{vu_X}{c^2})}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} mc^2 = \gamma \left[\frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} - \frac{mvu_X}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \right].$$

Finalmente, substituindo as equações (D.1) e (D.2) nos termos entre colchetes da equação acima, encontramos a expressão para a transformação de Lorentz para a energia total do referencial R para o referencial R', dada por:

$$E' = \gamma(E - vp_X). \quad (D.10)$$

Vamos agora encontrar as transformações para o momento relativístico.

Substituindo a equação (D.9) na equação (D.6), obtemos:

$$p'_X = \gamma \frac{(1-\frac{vu_X}{c^2})}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} mu'_X$$

Substituindo $u'_X = \frac{u_X - v}{1 - \frac{vu_X}{c^2}}$ [dado pela equação (B.20)], obtemos

$$p'_X = \gamma \frac{(1-\frac{vu_X}{c^2})}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \frac{(u_X - v)}{(1-\frac{vu_X}{c^2})} m = \gamma m \frac{u_X - v}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} = \gamma \left(\frac{mu_X}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} - \frac{mv}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \right).$$

Comparando esta equação com as equações (D.1) e (D.2), observamos que o primeiro termo entre parêntesis é igual a p_X e o segundo vale $\frac{vE}{c^2}$. Dessa forma, a equação para

p'_X torna-se

$$p'_X = \gamma(p_X - \frac{vE}{c^2}) \quad (D.11)$$

Substituindo a equação (D.9) e $u'_Y = \frac{u_Y}{\gamma(1-\frac{vu_X}{c^2})}$ [equação (B.20)] na equação (D.7),

obtemos

$$p'_Y = \gamma \frac{(1-\frac{vu_X}{c^2})}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \frac{u_Y}{\gamma(1-\frac{vu_X}{c^2})} m = \frac{mu_Y}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}.$$

Comparando esta equação com a equação (D.3) observamos que

$$p'_Y = p_Y. \quad (D.12)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para a componente Z do momento. Substituindo a equação (D.9) e $u'_Z = \frac{u_Z}{\gamma(1-\frac{vu_X}{c^2})}$ [equação (B.20)] na equação (D.8), encontramos

$$p'_Z = \gamma \frac{(1-\frac{vu_X}{c^2})}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \frac{u_Z}{\gamma(1-\frac{vu_X}{c^2})} m = \frac{mu_Z}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$$

e, comparando esta equação com a equação (D.4) observamos que

$$p'_Z = p_Z. \quad (D.13)$$

Dessa forma, as **transformações de Lorentz para a energia e momento** são dadas pelas equações (D.10), (D.11), (D.12) e (D.13), ou seja

$$\begin{cases} E' = \gamma(E - vp_X) \\ p'_X = \gamma(p_X - \frac{vE}{c^2}) \\ p'_Y = p_Y \\ p'_Z = p_Z \end{cases} \quad (D.14)$$

As transformações inversas são:

$$\begin{cases} E = \gamma(E' + vp'_X) \\ p_X = \gamma(p'_X + \frac{vE'}{c^2}) \\ p_Y = p'_Y \\ p_Z = p'_Z \end{cases} \quad (D.15)$$

Estas transformações relacionam a energia total e momento relativísticos em diferentes referenciais inerciais.

2 – Colisões de Alta Energia

Na unidade C mostramos que as equações para o momento relativístico satisfazem o princípio de conservação do momento. Para tal consideramos um processo de colisão elástica entre duas partículas de massas idênticas. Podemos usar um procedimento semelhante para mostrar que a energia total, que segue as transformações (D.14), também é uma grandeza conservada. Entretanto, neste ponto estamos interessados em colisões de partículas de alta energia. Neste tipo de colisão,

as partículas resultantes após a colisão podem ser diferentes das partículas antes da colisão, ou seja, podem-se criar novas partículas durante a colisão e destruir outras.

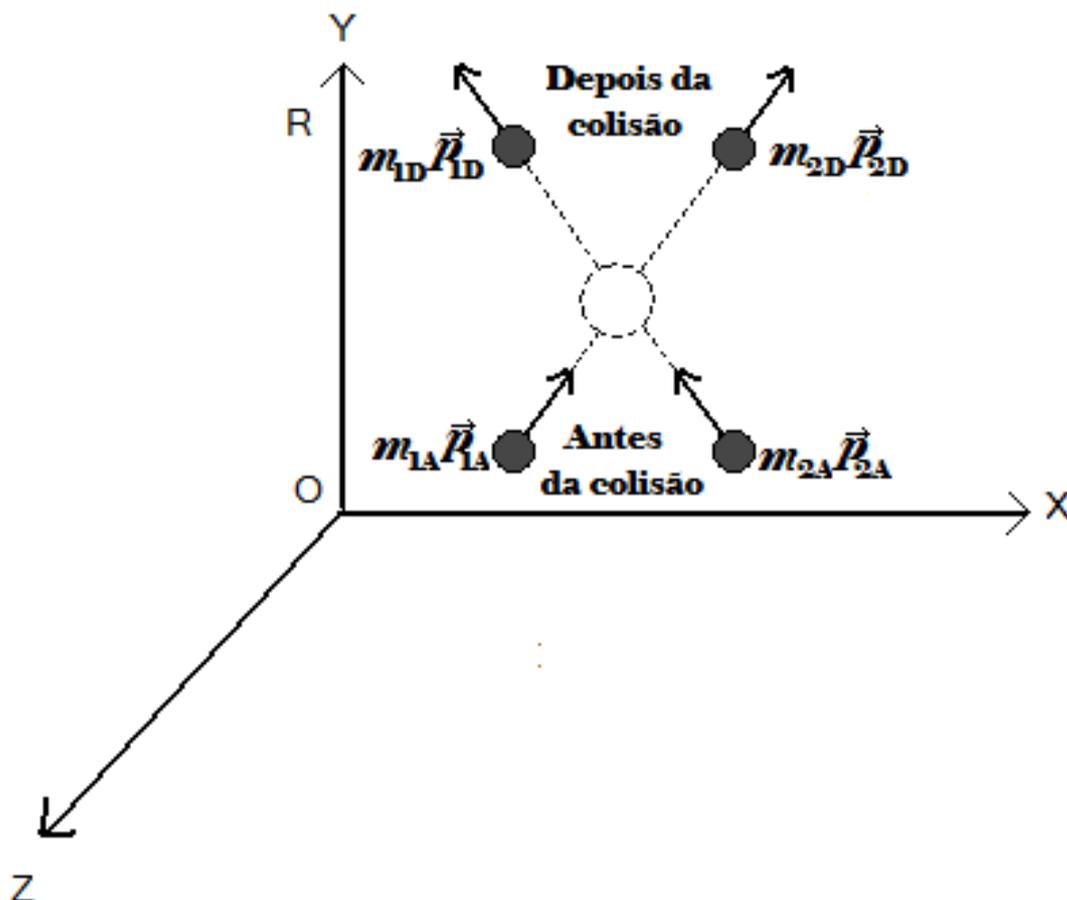


Figura D.2: Colisão entre duas partículas de alta energia com massas m_{1A} e m_{2A} e momentos \vec{p}_{1A} e \vec{p}_{2A} antes da colisão. Após a colisão novas partículas de massas m_{1D} e m_{2D} e momentos \vec{p}_{1D} e \vec{p}_{2D} são criadas.

Para discutir colisões entre partículas de alta energia, vamos considerar a situação mostrada na Figura D.2. Esta figura, mostra a colisão entre duas partículas fundamentais de massas, m_{1A} e m_{2A} , e momentos diferentes \vec{p}_{1A} e \vec{p}_{2A} . Enquanto essas partículas estão distantes uma da outra, a interação entre elas é desprezível. Entretanto, durante a colisão, as partículas interagem entre si criando novas partículas. Essas partículas criadas possuem massas m_{1D} e m_{2D} e momentos \vec{p}_{1D} e \vec{p}_{2D} diferentes das partículas iniciais. Note que todo o processo de colisão é visto em um único

referencial inercial R. Os princípios de conservação de momento e energia nos dizem que:

$$\vec{p}_{\text{Antes}} = \vec{p}_{\text{Depois}}$$

$$E_{\text{Antes}} = E_{\text{Depois}},$$

ou seja, o momento e a energia total deve ser os mesmos antes e depois da colisão. Neste texto, vamos discutir somente as implicações da segunda equação acima. Reescrevendo-a em termos das energias das partículas envolvidas temos:

$$E_{1A} + E_{2A} = E_{1D} + E_{2D}.$$

(D.16)

A energia total relativística para cada partícula é dada pela equação (C.15) e representa a soma da energia cinética e a energia de repouso da partícula, ou seja, $E = E_0 + E_c$, onde E_c é a energia cinética da partícula e $E_0 = mc^2$ é a energia de repouso da partícula. Dessa forma, podemos reescrever a equação (D.16) da seguinte maneira:

$$m_{1A}c^2 + E_{c1A} + m_{2A}c^2 + E_{c2A} = m_{1D}c^2 + E_{c1D} + m_{2D}c^2 + E_{c2D}$$

Colocando todos os termos correspondentes a energia cinética das partículas para o lado esquerdo da equação e os termos da energia de repouso das partículas para o lado direito, obtemos:

$$E_{c1A} + E_{c2A} - E_{c1D} - E_{c2D} = m_{1D}c^2 + m_{2D}c^2 - m_{1A}c^2 - m_{2A}c^2.$$

Podemos rearranjar esta equação da seguinte forma:

$$(E_{c1A} + E_{c2A}) - (E_{c1D} + E_{c2D}) = [(m_{1D} + m_{2D}) - (m_{1A} + m_{2A})]c^2. \quad (\text{D.17})$$

O lado esquerdo desta equação representa a variação da energia cinética durante a colisão, enquanto que o lado direito mostra a variação da energia de repouso das partículas envolvidas na colisão. Definido

$$\Delta E_c = E_{c\text{Depois}} - E_{c\text{Antes}} = (E_{c1D} + E_{c2D}) - (E_{c1A} + E_{c2A})$$

e

$$\Delta m = m_{\text{Depois}} - m_{\text{Antes}} = (m_{1D} + m_{2D}) - (m_{1A} + m_{2A}),$$

podemos escrever a equação (D.17) da seguinte forma:

$$\Delta E_c = -\Delta mc^2. \quad (\text{D.18})$$

Em uma colisão perfeitamente elástica, $\Delta E_c = 0$ e conseqüentemente, $\Delta m = 0$, ou seja, a massa se conserva. Se $\Delta m > 0$ necessariamente $\Delta E_c < 0$ e se $\Delta m < 0$,

$\Delta E_c > 0$, ou seja, pode haver uma variação de massa do sistema, desde que também ocorra uma variação da energia cinética.

Nas equações acima, consideramos o caso em que a colisão entre duas partículas resulta em duas partículas diferentes das iniciais. Entretanto, o resultado desta colisão pode resultar em mais do que duas partículas. Por exemplo, a colisão entre dois prótons pode resultar em um próton, um nêutron e um pión, ou seja, três partículas são criadas a partir de duas. Nestes casos, após a colisão, a energia cinética será a soma das energias cinéticas de todas as partículas criadas e a massa será a soma das massas de todas as partículas criadas. As equações para a variação da energia cinética e da massa se modificam da seguinte forma:

$$\Delta E_c = E_{c\text{Depois}} - E_{c\text{Antes}} = \sum E_{cD} - (E_{c1A} + E_{c2A}) \quad (\text{D.19})$$

e

$$\Delta m = m_{\text{Depois}} - m_{\text{Antes}} = \sum m_D - (m_{1A} + m_{2A}), \quad (\text{D.20})$$

onde $\sum E_{cD}$ é a soma das energias cinéticas das partículas criadas e $\sum m_D$ é a soma de suas massas. Com, ΔE_c e Δm dados pelas expressões acima, a equação (D.18) não se modifica.

3 – Limiar de Energia

Na situação em que temos $\Delta E_c < 0$ ou, equivalentemente, $\Delta m > 0$ há uma energia cinética mínima para as partículas antes da colisão para que ocorra a criação de novas partículas. Para encontrar a equação para esta energia cinética limite, vamos considerar a colisão de duas partículas, 1 e 2, de massas m_1 e m_2 , produzindo novas partículas. Supondo que em um certo referencial inercial (R) a partícula 1 possua momento $\vec{p}_1 = \vec{p}$ e a partícula 2 encontra-se em repouso $\vec{p}_2 = 0$. Consideramos ainda, um segundo referencial inercial (R') que se move em relação a R com velocidade tal que o momento relativístico inicial neste referencial seja nulo ($\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$). Esta escolha simplifica significativamente os cálculos.

No referencial R, antes da colisão o momento total será $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$ e a energia total será dada por $E = E_1 + E_2$, onde E_1 é a energia da partícula 1 e E_2 a energia da partícula 2. A energia da partícula 1 é $E_1 = \sqrt{p^2 c^2 + m_1^2 c^4}$ [dada pela equação (C.17)] e a energia da partícula 2 é $E_2 = m_2 c^2$ [equação (C.16)], então:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_1^2 c^2} + m_2 c^2. \quad (\text{D.21})$$

Usando a equação (C.17) no referencial R, obtemos:

$$(m_1 + m_2)^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2. \quad (\text{D.22})$$

Já no referencial R', temos:

$$(m_1 + m_2)^2 c^4 = E'^2 - p'^2 c^2. \quad (\text{D.23})$$

onde E' é a energia e p' o momento total antes da colisão no referencial R'.

Comparando as equações (D.22) e (D.23), obtemos:

$$E^2 - p^2 c^2 = E'^2 - p'^2 c^2$$

e substituindo $p'^2 = 0$ nesta equação, como imposto pela escolha do referencial, ela se reduz a:

$$E^2 - p^2 c^2 = E'^2. \quad (\text{D.24})$$

Substituindo o valor de E [dado pela expressão (D.21)] na equação acima, encontramos:

$$E'^2 = p^2 c^2 + m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^3 \sqrt{p^2 + m_1^2 c^2} - p^2 c^2.$$

Reescrevendo, obtemos:

$$E'^2 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^3 \sqrt{p^2 + m_1^2 c^2}. \quad (\text{D.25})$$

O princípio de conservação de energia e momento nos diz que a energia total do sistema antes da colisão deve ser igual a energia total após a colisão e a lei de conservação do momento nos diz que os momentos totais antes e depois da colisão devem ser iguais. O referencial R' foi escolhido de tal forma que o momento inicial do sistema de partículas fosse nulo, e, dessa forma, o momento final (das partículas criadas) também deve ser nulo. Usando a relação (C.17) notamos que nesta situação, a energia final do sistema corresponde à energia de repouso das partículas criadas, ou seja, $E'_D = E'_{0D} = \sum_i m_{Di} c^2$, onde m_{Di} é a massa da i -ésima partícula resultante da colisão. Então, da lei de conservação de energia no referencial R', temos $E' = E'_D$ ou, elevando ao quadrado, $E'^2 = E'^2_D$. Substituindo, nesta expressão, E'^2 , dado pela equação (D.25) e $E'^2_D = (\sum_i m_{Di})^2 c^4$, obtemos:

$$m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^3 \sqrt{p^2 + m_1^2 c^2} = (\sum_i m_{Di})^2 c^4. \quad (\text{D.26})$$

Temos que a energia total da partícula 1 antes da colisão no referencial R é dada pela equação (C.17) e vale $E_1 = c\sqrt{p^2 + m_1^2 c^2} = E_c + m_1 c^2$, onde E_c é a energia

cinética da partícula 1, a qual corresponde a energia cinética total pois a partícula 2 encontra-se inicialmente em repouso, e m_1c^2 é sua energia de repouso. Substituindo esta expressão na equação (D.26), obtemos:

$$m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2m_2c^2(E_c + m_1c^2) = (\sum_i m_{Di})^2c^4.$$

Abrindo o último termo do lado direito da equação acima em dois termos, obtemos:

$$m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2m_2c^2E_c + 2m_1m_2c^4 = (\sum_i m_{Di})^2c^4$$

e dividindo c^2 , temos:

$$m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2m_2E_c + 2m_1m_2c^2 = (\sum_i m_{Di})^2c^2$$

ou

$$(m_1 + m_2)^2c^2 + 2m_2E_c = (\sum_i m_{Di})^2c^2.$$

Isolando $2m_2E_c$, obtemos:

$$2m_2E_c = [(\sum_i m_{Di})^2 - (m_1 + m_2)^2]c^2 = -[(m_1 + m_2)^2 - (\sum_i m_{Di})^2]c^2.$$

Esta equação pode ser reescrita na forma:

$$2m_2E_c = -[(m_1 + m_2 + \sum_i m_{Di})(m_1 + m_2 - \sum_i m_{Di})]c^2.$$

O segundo termo entre parêntesis do lado direito da equação acima foi definido na seção anterior [equação (D.20)] como $-\Delta m$, a variação da massa total durante a colisão, e chamando o primeiro de M , obtemos:

$$2m_2E_c = M\Delta mc^2,$$

mas, de acordo com a equação (D.18), $\Delta m = -\frac{\Delta E_c}{c^2}$, então:

$$E_c = -\frac{M\Delta E_c}{2m_2}. \quad (D.27)$$

Esta é a expressão para a energia cinética mínima necessária para criar partículas a partir da colisão entre duas partículas. Como a energia cinética é uma grandeza positiva, esta expressão implica que ΔE_c é uma grandeza negativa, ou seja, a energia cinética total do sistema após a colisão é menor do que a soma das energias cinéticas das partículas iniciais.

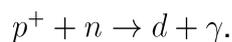
Esta energia mínima somente é necessária quando $\Delta m > 0$. Quando, a massa das partículas formadas for menor do que a massa das partículas iniciais, ou seja, $\Delta m < 0$, ΔE_c é uma grandeza positiva e não há um limite para valor das energias cinéticas das partículas iniciais. Neste caso, as energias de repouso das partículas iniciais são suficientes para a produção de novas partículas.

Experimentalmente, são utilizados grandes [aceleradores de partículas](#) para acelerar partículas até velocidades suficientemente altas para que a energia cinética mínima seja atingida. Utilizando estes equipamentos os cientistas são capazes de produzir partículas em condições semelhantes às condições físicas do universo primordial e conseqüentemente, obter um melhor entendimento sobre a história do universo.

4 – Formação e Destruição de Partículas: Alguns Exemplos

Nas últimas seções, discutimos processos de colisões entre partículas genéricas de altas energias e massas quaisquer e a formação de novas partículas durante a colisão. Agora, vamos discutir alguns aspectos sobre formação e destruição de partículas reais.

Começamos discutindo o processo de formação do dêuteron a partir da interação entre um próton e um nêutron, dado pela seguinte reação:



Além do dêuteron, este processo resulta na emissão de um fóton com energia $E_\gamma = 3,5631 \times 10^{-13}$ J. Podemos obter o comprimento de onda deste fóton através da seguinte relação:

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

onde $h = 6,6261 \times 10^{-34}$ m²kg/s é a constante de Planck. Substituindo $c = 2,9979 \times 10^8$ m/s e E_γ e h na equação acima obtemos $\lambda = 5,5750 \times 10^{-13}$ m = 557,50 fm.

A variação de massa do sistema durante a colisão é $\Delta m = (m_p + m_n) - (m_d + \gamma) = [(1,6726 + 1,6749) - (3,3436 + 0)] \times 10^{-27}$ kg
 $\Delta m \approx 3,9 \times 10^{-30}$ kg,

ou seja, há um desaparecimento de massa durante o processo. Embora a ordem de grandeza deste valor pareça pequena, é interessante notar que ele corresponde a aproximadamente um milésimo da massa total das partículas iniciais e a massa do sistema não é conservada.

Embora o fóton não possua massa, ele transporta inércia. Esta inércia vale

$$\frac{E_\gamma}{c^2} \approx 3,9 \times 10^{-30} \text{ kg}.$$

Note que este valor é igual ao valor obtido acima para Δm , ou seja, o decréscimo de massa do sistema pode ser atribuído a inércia transportada pelo fóton.

Como discutido na seção anterior, quando a massa total das partículas formadas é menor do que a massa total das partículas iniciais não há uma energia cinética mínima para a produção de novas partículas – as energias de repouso das partículas são o suficiente. Vamos então considerar que o próton e o nêutron encontram-se em repouso em um dado referencial. Para satisfazer o princípio de conservação de momento, o dêuteron formado também deverá estar em repouso. Nesta situação, estas partículas possuem somente suas energias de repouso e a variação da energia total durante o processo é dada por:

$$\Delta E = m_d c^2 + E_\gamma - m_p c^2 - m_n c^2 = (\Delta m - \frac{E_\gamma}{c^2}) c^2.$$

Como Δm e $\frac{E_\gamma}{c^2}$ tem o mesmo valor, obtemos $\Delta E = 0$, ou seja, a energia do sistema é conservada.

Apresentamos, agora mais algumas considerações sobre a energia de partículas livres. De acordo com a equação (C.17) a energia de uma partícula livre pode ser dada por:

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Esta equação prevê a existência de partículas de energia negativa. De fato, o físico britânico Paul A. M. Dirac (1902 – 1984) propôs em 1928 uma equação de onda relativística que descreve o comportamento do elétron. Esta equação possui soluções de energia negativa, levando a previsão da existência de antipartículas. Esta previsão foi confirmada em 1932, quando o físico americano Carl Anderson (1905 – 1991) descobriu a antipartícula do elétron: pósitron, que uma partícula com massa igual a do elétron e carga elétrica igual a do próton. Outras antipartículas foram descobertas posteriormente em estudos de processos físicos de alta energia presentes na natureza, como os raios cósmicos, e em colisões de partículas de alta energia em aceleradores de partículas. Atualmente, a existência de antipartículas é altamente aceita pela comunidade científica, sendo possível, inclusive a criação de anti-átomos, como o anti-hidrogênio.

Outro passo importante na criação e destruição de partículas foi dado pelo desenvolvimento da eletrodinâmica quântica pelo físico americano Richard P. Feynman (1918 – 1988) e outros cientistas, no final da década de 1940, a qual prevê a criação e destruição de partículas, não considerada na equação de Dirac.

Vamos considerar como exemplo de destruição de partículas, a colisão de um elétron (e^-) e um pósitron (e^+). Neste processo, as partículas são aniquiladas através de uma das seguintes reações:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$$

ou

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma,$$

sendo que a emissão de pelo menos dois fótons (γ) é necessária para que os princípios de conservação de energia e momento sejam satisfeitas. A primeira reação é mais provável quando o pósitron possui energia cinética pequena.

Outro exemplo de aniquilação de partículas é a reação

$$p^+ + p^- \rightarrow \gamma + \gamma,$$

onde um próton (p^+) e um antipróton (p^-) em repouso se aniquilam mutuamente. Podemos utilizar os princípios de conservação de momento e energia para determinar a energia dos fótons emitidos. O princípio da conservação do momento implica que o momento total dos fótons resultantes deve ser nulo pois o momento total inicial é nulo (as partículas estão em repouso), ou seja, os fótons devem ter momentos iguais em módulo e de sentidos opostos. Como os módulos dos momentos dos fótons criados são iguais, implica que eles também possuem energias iguais. Usando o princípio da conservação da energia, temos:

$$E_{\text{Antes}} = E_{\text{Depois}}$$

$$m_p c^2 + m_p c^2 = E_\gamma + E_\gamma,$$

onde o primeiro e o segundo termo do lado esquerdo desta equação são as energias de repouso do próton e do antipróton, respectivamente. A energia de um fóton resultante é

$$E_\gamma = m_p c^2 = 938 \text{ MeV} \approx 1,5 \times 10^{-10} \text{ J}$$

e o comprimento de onda da radiação emitida é $\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = 1,32 \times 10^{-15} \text{ m} = 1,32 \text{ fm}$.

Nesta seção apresentamos três exemplos de processos de formação e destruição de partículas. Existem inúmeros outros exemplos que ocorrem na natureza e, muitos destes podem ser reproduzidos em aceleradores de partículas. Em todos estes processos, os princípios de conservação de energia total relativística e momento relativístico são satisfeitos.

RESUMO DA UNIDADE

Transformações de Energia e Momento: As transformações de Lorentz para a Energia e Momento são:

$$\begin{cases} E' = \gamma(E - vp_X) \\ p'_X = \gamma(p_X - \frac{vE}{c^2}) \\ p'_Y = p_Y \\ p'_Z = p_Z \end{cases}$$

Colisões de Alta Energia: Quando partículas de alta energia colidem, pode-se criar novas partículas e/ou destruir partículas envolvidas na colisão. Em uma colisão, a variação da energia cinética (ΔE_c) se relaciona com a variação da massa das partículas (Δm) pela seguinte expressão:

$$\Delta E_c = -\Delta mc^2. \quad (\text{D.18})$$

Em uma colisão perfeitamente elástica, $\Delta E_c = 0$ e conseqüentemente, $\Delta m = 0$, ou seja, a massa se conserva. Se $\Delta m > 0$ necessariamente $\Delta E_c < 0$ e se $\Delta m < 0$, $\Delta E_c > 0$, ou seja, pode haver uma variação de massa do sistema, desde que também ocorra uma variação da energia cinética.

Energia Limite: Quando $\Delta E_c < 0$ ou, equivalentemente, $\Delta m > 0$ há uma energia cinética mínima para as partículas antes da colisão para que ocorra a criação de novas partículas. Quando duas partículas colidem, esta energia é dada por:

$$E_c = -\frac{M\Delta E_c}{2m_2} \quad (\text{D.27})$$

onde M é a soma das massas de todas as partículas e m_2 é a massa de uma das partículas antes da colisão. Como a energia cinética é uma grandeza positiva, esta expressão implica que ΔE_c é uma grandeza negativa, ou seja, a energia cinética total do sistema após a colisão é menor do que a soma das energias cinéticas das partículas iniciais. Quando $\Delta m < 0$, ΔE_c é uma grandeza positiva e não há um limite para valor das energias cinéticas das partículas iniciais. Neste caso, as energias de repouso das partículas iniciais são suficientes para a produção de novas partículas.

EXERCÍCIOS

1 – Uma partícula dentro de uma nave espacial viajando com velocidade de módulo $0,5c$ possui energia total $E' = 1 \times 10^{-10}$ J e componente de momento na direção X igual a $p'_X = 1 \times 10^{-18}$ kg.m/s, medidos em relação a um referencial inercial fixo na nave. Quais são os valores de energia e momento em um referencial inercial fixo na Terra? [Respostas: $2,89 \times 10^{-10}$ J; $1,35 \times 10^{-18}$ kg.m/s]

2 – Uma partícula de massa $2 \text{ MeV}/c^2$ e energia cinética de 4 MeV colide com uma partícula de massa $3 \text{ MeV}/c^2$, inicialmente em repouso.

- Calcule o módulo do momento antes da colisão. [Resposta: $5,66 \text{ MeV}/c$]
- Se as duas partículas permanecem unidas após a colisão, qual é a massa da partícula resultante? [Resposta: $7 \text{ MeV}/c^2$]
- Qual é o módulo da velocidade da partícula resultante? [Resposta: $0,63c$]

3 – Uma partícula de massa 1×10^{-30} kg e energia cinética de 2×10^{-13} J colide com uma partícula de massa 5×10^{-30} kg, inicialmente em repouso.

- Calcule o módulo do momento antes da colisão. [Resposta: $9,2 \times 10^{-22}$ kg.m/s]
- Se as duas partículas permanecem unidas após a colisão, qual é a massa da partícula resultante? [Resposta: $7,63 \times 10^{-30}$ kg]
- Qual é o módulo da velocidade da partícula resultante? [Resposta: $0,37c$]
- Qual é a variação da energia cinética durante a colisão? [Resposta: $-1,47 \times 10^{-13}$ J]

Considere o módulo da velocidade da luz como sendo $c=3 \times 10^8$ m/s.

Referências

A seguir apresentamos uma lista de referências sobre a teoria da relatividade especial. A maioria destas referências foi utilizada como material de consulta para a elaboração do presente texto.

- 1- ALLONSO, M.; FINN, E.J. *Física geral*, São Paulo, Addison Wesley, 1986.
- 2- BOHM, D. *The special theory of relativity*, New York, Addison Wesley, 1989.
- 3- GAZZINELLI, R. *Teoria da Relatividade Especial 2ª Ed.*, São Paulo, Editora Blucher, 2009.
- 4- HALLIDAY, D., RESNICK, R. & WALKER, J. *Fundamentos da Física 8ª Ed. Vol. 4: Ótica e Física Moderna*, Rio de Janeiro, Editora LTC, 2009.
- 5- KNIGHT, R. D. *FÍSICA: uma abordagem estratégica, 2ª Ed. Vol. 4: Relatividade e Física Quântica*, Porto Alegre, Editora Bookman, 2009.
- 6- PALANDI, J. [Introdução a Teoria da Relatividade Especial](http://www.ufsm.br/gef/Relatividade00.htm), disponível em <http://www.ufsm.br/gef/Relatividade00.htm> (acessada em 10/05/2010).
- 7- TIPLER, P. A. & LLEWELLYN, R. A. *Física Moderna, 3ª Ed.*, Rio de Janeiro, Editora LTC, 2001.
- 8- UGAROV, V. A. *Special Theory of Relativity*, Mir Publishers, 1979.