Universidade Federal de Santa Maria - UFSM
FSC1036 - Eletromagnetismo I
Prof. Rogemar A. Riffel

LISTA 1: *Análise Vetorial e Sistemas de Coordenadas*

1. Mostre as seguintes identidades vetoriais:
a) $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b})$
b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$
c) $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$
d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}.\vec{c})$

2. Sabendo que as transformações dos versores em coordenadas polares para coordenadas cartesianas são dadas por

$$\hat{\rho} = \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{j}}$$
$$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}},$$

encontre as relações inversas.

3. Sabendo que as transformações dos versores em coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas são dadas por

$$\hat{\mathbf{r}} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{j}} - \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\phi} = -\operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\hat{\mathbf{j}}$$

encontre as relações inversas.

4. Mostre que a matriz de tranformação do sistema de coordenadas retangulares para o sistema de coordenadas esféricas possui determinante igual a unidade, ou seja

$$\det T\{R_3, \varepsilon\} = 1$$

5. Encontre os vetores unitários das coordenadas cilíndricas em termos de suas componentes cartesianas, ou seja, mostre que:

$$\hat{\rho} = \cos\theta\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\hat{j}$$
$$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$
$$\hat{k} = \hat{k}$$

6. Use o resultado do exercício anterior e encontre os vetores unitários das coordenadas cartesianas em termos de suas componentes em coordenadas cilíndricas.

7. Sobre o sistema de coordenadas cilíndricas, mostre que:

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\theta} = \hat{\theta}$$

$$\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} = -\hat{\rho}$$

8. Encontre os vetores unitários das coordenadas esféricas em termos de suas componentes cartesianas, ou seja, mostre que:

$$\hat{r} = \hat{\imath}\text{sen}\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\text{sen}\theta\text{sen}\phi + \hat{k}\cos\theta$$
$$\hat{\theta} = \hat{\imath}\cos\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\cos\theta\text{sen}\phi - \hat{k}\text{sen}\theta$$
$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\text{sen}\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

9. Demonstre a primeira identidade de Green

$$\int_V (\Phi\nabla^2\Psi + \vec{\nabla}\Phi.\vec{\nabla}\Psi)dV = \oint_S \Phi\vec{\nabla}\Psi.\hat{n}dA$$

10. Demonstre a segunda identidade de Green (ou teorema de Green)

$$\int_V (\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi)dV = \oint_S (\Psi\vec{\nabla}\Phi - \Phi\vec{\nabla}\Psi).\hat{n}dA$$

11. Em coordenadas cilíndricas mostre que:

a)$\vec{\nabla}\Psi = \hat{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \hat{\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \hat{k}\frac{\partial\Psi}{\partial z}$

b)$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

c)$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{\rho}(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}) + \hat{\theta}(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}) + \hat{k}\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta})$

d)$\nabla^2\Psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$

12. Em coordenadas esféricas mostre que

$$\vec{\nabla}\Psi = \hat{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\text{sen}\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}$$

13. Uma esfera de raio R tem uma densidade volumétrica de massa ρ. Calcule sua massa nos seguintes casos:

a) $\rho = \rho_0$ (constante)

b) $\rho = a_0 r$

c) $\rho = \frac{a_0}{r}$

14. Um cilindro de raio R e altura Z tem uma densidade volumétrica de massa μ. Calcule sua massa nos seguintes casos:

a) $\mu = \mu_0$ (constante)

b) $\mu = a_0\rho$